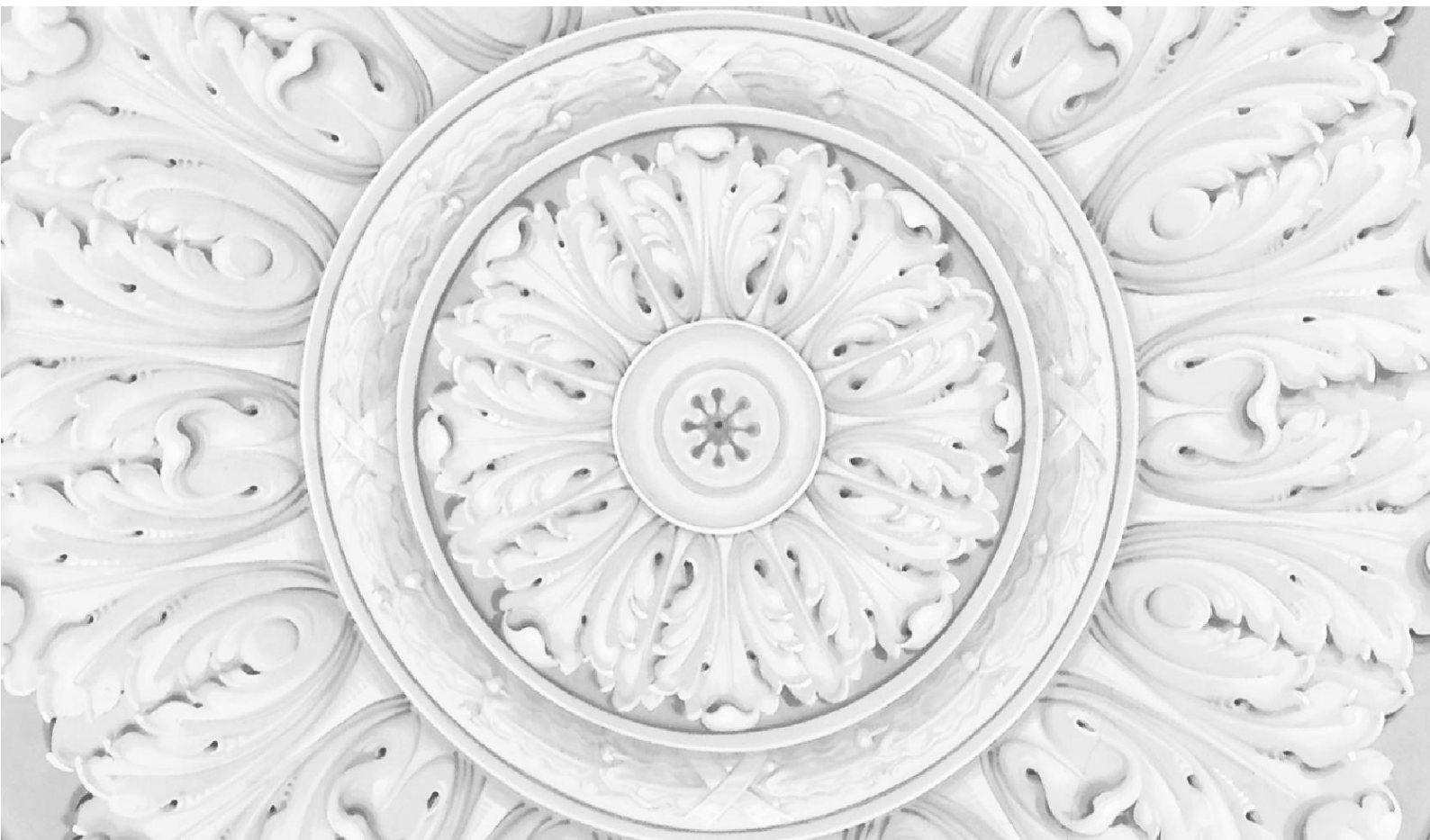




Банк России

Центральный банк Российской Федерации



**СЕРИЯ ДОКЛАДОВ
ОБ ЭКОНОМИЧЕСКИХ
ИССЛЕДОВАНИЯХ**

Дмитрий Крепцев
Сергей Селезнев

DSGE-модели российской
экономики с малым количеством
уравнений

№ 12 / Май 2016

Дмитрий Крепцев

Банк России, Департамент исследований и прогнозирования

E-mail: KreptsevDA@cbr.ru**Сергей Селезнев**

Банк России, Департамент исследований и прогнозирования

E-mail: SeleznevSM@cbr.ru

Авторы выражают благодарность Б. Гафарову, Н. Кулагину, П. Молякову, А. Морозову, А. Полбину, А. Пономаренко, А. Поршакову и А. Синякову за помощь в проведении исследования и полезные комментарии. Все ошибки, которые могут содержаться в данной работе, являются сферой ответственности авторов.

© Центральный банк Российской Федерации, 2016

Адрес 107016, Москва, ул. Неглинная, 12
Телефоны +7 495 771-91-00, +7 495 621-64-65 (факс)
Сайт www.cbr.ru

Все права защищены. Содержание настоящего доклада выражает личную позицию авторов и может не совпадать с официальной позицией Банка России. Банк России не несет ответственности за содержание доклада. Любое воспроизведение представленных материалов допускается только с разрешения авторов.

Резюме

В данной работе исследуется способность DSGE-модели с малым количеством уравнений объяснять поведение основных макроэкономических переменных для российской экономики. Используются две версии стандартной модели малой открытой экономики с добавлением стохастического тренда в ценах на нефть при различных предположениях о политике валютного курса. По большинству критериев модель с фиксированным курсом оказывается предпочтительнее модели с плавающим курсом, однако условные прогнозы на цены на нефть для ВВП и ставки процента точнее в модели с плавающим курсом. Сравнение с BVAR-моделью такого же размера показывает, что DSGE-модели оказываются лучше в части прогноза курса, цен и процентной ставки и немного проигрывают в части прогноза ВВП.

Ключевые слова: нестационарные DSGE, стохастические тренды, прогнозирование.

JEL-классификация: С61, Е37, Е47.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ	7
<i>1.1. Домохозяйства</i>	<i>7</i>
<i>1.2. Фирмы</i>	<i>8</i>
1.2.1. Домашние фирмы	8
1.2.2. Фирмы-импортеры	9
1.2.3. Фирмы-упаковщики	10
<i>1.3. Торговый баланс</i>	<i>10</i>
<i>1.4. Денежно-кредитная политика</i>	<i>11</i>
<i>1.5. Экзогенные процессы</i>	<i>12</i>
2. РЕШЕНИЕ И ОЦЕНКА МОДЕЛИ	13
<i>2.1. Логлинеаризованная система</i>	<i>13</i>
<i>2.2. Уравнения наблюдений</i>	<i>14</i>
<i>2.3. Оценка модели</i>	<i>14</i>
<i>2.4. Результаты</i>	<i>15</i>
<i>2.5. Сравнение моделей</i>	<i>16</i>
2.5.1. Декомпозиция и импульсные отклики	16
2.5.2. Предельная плотность	17
2.5.3. RMSE	18
<i>2.6. Расширения модели и робастность результатов</i>	<i>18</i>
2.6.1. Нелинейное решение	19
2.6.2. Чувствительность коэффициентов к априорному распределению	19
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	20
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	21
Приложение А	24
Приложение Б	48
Приложение В	50
Приложение Г	51

ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие DSGE¹-модели получили широкое распространение как в академических кругах, так и в центральных банках, министерствах и международных финансовых организациях. Модели этого класса могут использоваться для решения широкого спектра задач², в том числе связанных с формулированием и реализацией денежно-кредитной политики (ДКП). Данный класс моделей часто используется в качестве «лаборатории» для сценарного анализа и определения оптимальных правил ДКП. В этом качестве DSGE-модели представляют значительный практический интерес для Банка России.

Используемые на практике спецификации DSGE-моделей могут быть крайне разнородны в зависимости от задач, для которых они разрабатываются. В частности, в различных приложениях используются структурные модели как с малым, так и с большим количеством уравнений. Так, в центральных банках все чаще используются средние и крупные модели (*Cristoffel et al. (2008)*, *Christiano et al. (2010)*, *Adolfson et al. (2013)*, *Burgess et al. (2013)*), однако в исследованиях чаще применяются модели с малым и средним числом уравнений (см., например, *Lubik and Matthes (2014)*, *Maliar and Maliar (2015)*, *Fernandez-Villaverde et al. (2015)*, *Aruoba et al. (2016)*, *Diebold et al. (2016)*). В данной работе мы исследуем способность структурной линейной модели с малым количеством уравнений объяснять динамику основных макроэкономических переменных. Такие небольшие модели могут служить отправной точкой для более крупных структурных моделей, а также ввиду простоты могут быть ядром для создания различных модификаций.

При этом основным вкладом данной работы является приложение модели к фактической динамике основных макроэкономических переменных в России в период с 2003 по 2015 год. Несмотря на то, что разработка DSGE-моделей для России в принципе не является новой (см., например, *Полбин*³ (2014)), нам неизвестны примеры их регулярного использования на практике для эмпирического моделирования и прогнозирования.

Во многом это обусловлено объективными факторами, существенно осложняющими применение таких моделей для экономик переходного периода. В частности, российская экономика была подвержена ряду структурных изменений в этот отрезок времени (переход к таргетированию инфляции, к плавающему валютному курсу, шок цен на нефть и др.) и не

¹ Динамические стохастические модели общего равновесия (dynamic stochastic general equilibrium models).

² Впрочем, этот класс моделей (как и любой другой) имеет определенные недостатки. Критику, которая применима к большинству DSGE-моделей можно найти, например, в работе *Korinek (2015)*. Ряд проблем, с которыми столкнулись исследователи в последний кризис, описаны в работе *Linde et al. (2015)*.

³ Большинство DSGE-моделей для российской экономики построено на данных после НР-фильтрации. Проблемы, которые могут возникать при такой процедуре, описаны в *Gorodnichenko and Ng (2010)*.

может быть описана простой моделью. Тем не менее мы вынуждены делать допущения относительно существовавшей функции реакции ДКП (и ее восприятия экономическими агентами) для нахождения модельных параметров. С этой целью мы оцениваем две альтернативные модели, в которых предполагается разный режим ДКП (с фиксированным или плавающим обменным курсом). В этой ситуации мы находим «псевдооптимальные» параметры⁴, понимая, что в обоих случаях модели являются неверно специфицированными.

Для того чтобы определить, насколько хорошо наши модели согласуются с фактическими данными, мы сравниваем их по ряду критериев. Во-первых, это предельные плотности, которые являются одной из основных характеристик при описании качества моделей с байесовской точки зрения и байесовского усреднения моделей (BMA). Учитывая небольшое количество наблюдений, мы также проверяем, как сильно полученные нами результаты зависят от выбора априорных распределений. Для того чтобы выявить, насколько четко модели удалось установить структурные взаимосвязи между переменными, мы анализируем импульсные отклики и декомпозиции. Наконец, сравниваем точность вневыборочных модельных прогнозов. Обладая хорошей интерпретируемостью благодаря наличию структуры, DSGE-модели зачастую проигрывают байесовским векторным авторегрессиям⁵ (BVAR) по качеству прогнозов, поэтому мы дополнительно сравниваем полученные модели с BVAR.

В результате мы приходим к выводу, что в России в период с 2003 по 2015 годы модель с режимом фиксированного курса по большинству критериев предпочтительнее модели с плавающим курсом. Более того, данная модель превосходит BVAR в прогнозной силе по индексу потребительских цен (ИПЦ) и обменному курсу (хотя и проигрывает по выпуску). В то же время, несмотря на то что при определенных обстоятельствах продемонстрированные нами малоразмерные модели в принципе могут служить приемлемой аппроксимацией для российской экономики, мы приводим ряд аргументов в пользу их неверной спецификации и предполагаем, что использование моделей с более богатой структурой будет более предпочтительным для целей ДКП. Также отмечается, что ввиду короткой длины выборки модель с фиксированным курсом достаточно чувствительна к выбору априорных значений.

Дальнейшее изложение будет построено следующим образом: в разделе 1 будет дано описание модели, раздел 2 посвящен решению и оценке модели, а также в этом разделе обсуждаются результаты, в последнем разделе подводятся итоги проделанной работы и рассматриваются возможные направления дальнейшей работы.

⁴ Более подробное описание см. в работе *Fernandez-Villaverde et al. (2016)*.

⁵ Примерами сравнения с использованием выборок, учитывающих кризисный период, могут служить работы *Domit et al. (2016)* и *Iversen et al. (2016)*. См. также *Edge and Gurkaynak (2010)* для примера сравнения с другими прогнозами, в том числе профессиональными.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Представленная в данной работе модель описывает малую открытую экономику со следующими типами агентов: домохозяйства, фирмы, внешний сектор и центральный банк. Для простоты изложения мы не вводим в нее капитал, а также предполагаем, что весь экспорт является нефтяным. Остальная структура является стандартной⁶ и представлена на рисунке 1.

1.1. Домохозяйства

Домохозяйства выбирают уровень потребления, сбережений, а также количество отработанных часов, максимизируя при этом полезность, которая выглядит следующим образом:

$$U_t(j) = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i \left(\frac{(C_{t+i}(j) - hC_{t+i-1})^{1-\sigma_c} - 1}{1-\sigma_c} - A_L \frac{(L_{t+i}(j))^{1+\phi}}{1+\phi} \right).$$

Домохозяйства учитывают бюджетное ограничение, задающее связь доходов, расходов и заимствований:

$$\begin{aligned} P_t^{cpi} C_t(j) + (R_t)^{-1} * B_t(j) + \left(R_t^* * rp(b_t^*, p_t^{oil}, e^{RP}) \right)^{-1} * \varepsilon_t * B_t^*(j) = \\ = W_t * L_t(j) + B_{t-1}(j) + \varepsilon_t * B_{t-1}^*(j) + \Pi_t(j) \end{aligned}$$

где P_t^{cpi} – индекс потребительских цен,

R_t – отечественная процентная ставка,

R_t^* – зарубежная процентная ставка,

$rp(b_t^*, p_t^{oil}, e^{RP})$ – риск-премия, зависящая от относительного уровня долга (см. ниже), реальной долларовой цены на нефть, стохастической части премии за риск,

ε_t – номинальный валютный курс,

W_t – заработная плата,

$C_t(j)$ – потребление j -го домохозяйства,

$L_t(j)$ – труд j -го домохозяйства,

$B_t(j)$ – чистые активы в отечественной валюте,

$B_t^*(j)$ – чистые активы в иностранной валюте,

$\Pi_t(j)$ – единовременные платежи.

Условия первого порядка выглядят следующим образом:

$$1 = \beta * R_t * E_t \left(\frac{(C_{t+1} - h * C_t)^{-\sigma_c}}{(C_t - h * C_{t-1})^{-\sigma_c}} * \frac{P_t^{cpi}}{P_{t+1}^{cpi}} \right), \quad (1)$$

⁶ Данная модель похожа на *Soto and Medina (2006)*, однако в данной работе не учитывается капитал и весь экспорт считается нефтяным.

$$1 = \beta * R_t^* * rp(b_t^*, p_t^{oil}, e^{RP}) * E_t \left(\frac{(C_{t+1} - h * C_t)^{-\sigma_c} * \frac{P_t^{cpi}}{P_{t+1}^{cpi}} * \frac{\varepsilon_{t+1}}{\varepsilon_t}}{(C_t - h * C_{t-1})^{-\sigma_c}} \right), \quad (2)$$

$$\frac{W_t}{P_t^{cpi}} * (C_t - h * C_{t-1})^{-\sigma_c} = A_L * (L_{t+1})^\phi. \quad (3)$$

Уравнения (1)–(3) являются стандартными и имеют естественную экономическую интерпретацию. Уравнение (1), обычно называемое уравнением Эйлера, задает связь между текущим и будущим уровнями потребления и фактически является следствием одинаковой полезности между потреблением сейчас и сбережением сейчас, а потреблением на полученные средства в следующем периоде.

Комбинация уравнений (1) и (2) дает уравнение паритета процентных ставок:

$$R_t = R_t^* * rp(b_t^*, p_t^{oil}, e^{RP}) * \frac{E_t \left(\frac{(C_{t+1} - h * C_t)^{-\sigma_c} * \frac{P_t^{cpi}}{P_{t+1}^{cpi}} * \frac{\varepsilon_{t+1}}{\varepsilon_t}}{(C_t - h * C_{t-1})^{-\sigma_c}} \right)}{E_t \left(\frac{(C_{t+1} - h * C_t)^{-\sigma_c} * \frac{P_t^{cpi}}{P_{t+1}^{cpi}}}{(C_t - h * C_{t-1})^{-\sigma_c}} \right)}.$$

Уравнение (3) – кривая предложения труда.

1.2. Фирмы

Фирмы в модели делятся на три типа: домашние фирмы, фирмы импортеры и фирмы упаковщики, которые агрегируют импортные и отечественные товары в товары конечного потребления.

1.2.1. Домашние фирмы

Производственная функция домашних фирм зависит только от нанимаемого труда и совокупной факторной производительности:

$$Y_t(k) = A_t * L_t(k), \quad (4)$$

где $Y_t(k)$ – производство k -й фирмы,

$L_t(k)$ – труд нанимаемый k -й фирмой,

A_t – совокупная факторная производительность.

Предполагается также, что функция спроса на продукцию k -й фирмы имеет вид⁷:

$$Y_t(k) = \left(\frac{P_t^H(k)}{P_t^H} \right)^{-\frac{1}{v_H}} Y_t,$$

где $P_t^H(k)$ – цена, устанавливаемая k -й фирмой,

P_t^H – цена домашних товаров,

Y_t – объем производимых домашних товаров.

⁷ Более подробное описание функции спроса можно найти, например, в *Walsh (2010)*.

Фирмы максимизируют дисконтированную прибыль, которая складывается из выручки $\frac{P_t^H(k)}{P_t^{cpi}} \left(\frac{P_t^H(k)}{P_t^H}\right)^{-\frac{1}{\nu_H}} Y_t$ за вычетом издержек на труд $\frac{W_{t+i}}{P_{t+i}^{cpi}} * L_t(k)$ и с учетом корректировки цен $\frac{k_H}{2} * \left(\frac{P_{t+i}^H(k)}{P_{t+i-1}^H(k)} - (\pi_{t-1}^H) * (\pi_*)^{1-\iota_H}\right)^2 * Y_{t+i} * \frac{P_{t+i}^H}{P_{t+i}^{cpi}}$. Данный способ введения фрикций при выборе фирмой ценовой политики описан в работе *Rotemberg (1982)*. Часто применяемой в DSGE-моделях альтернативой этого метода является ситуация, когда фирмы имеют возможность устанавливать цены без издержек. Однако в каждый период фирма с определенной вероятностью оптимизирует свое поведение (см. *Calvo (1983)*), а в тех случаях, когда не оптимизирует, – устанавливает цену исходя из заранее заданного правила⁸. Прибыль в случае установления цен, согласно Ротембергу, записывается следующим образом:

$$E_t \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{t+i} \left(\begin{aligned} & \frac{P_{t+i}^H(k)}{P_{t+i}^{cpi}} \left(\frac{P_{t+i}^H(k)}{P_{t+i}^H}\right)^{-\frac{1}{\nu_H}} Y_{t+i} - \frac{W_{t+i}}{P_{t+i}^{cpi}} * L_t(k) - \\ & - \frac{k_H}{2} * \left(\frac{P_{t+i}^H(k)}{P_{t+i-1}^H(k)} - (\pi_{t-1}^H) * (\pi_*)^{1-\iota_H}\right)^2 * Y_{t+i} * \frac{P_{t+i}^H}{P_{t+i}^{cpi}} \end{aligned} \right),$$

где λ_t – дисконт-фактор, применяемый фирмой, $\pi_t^H = \frac{P_t^H}{P_{t-1}^H}$.

Условием первого порядка является кривая предложения, которая часто называется кривой Филлипса:

$$\left(1 - \frac{1}{\nu_H}\right) + \frac{1}{\nu_H} \frac{W_t}{A_t * P_t^{cpi}} * \frac{1}{p_t^H} - k_H * (\pi_t^H - (\pi_{t-1}^H) * (\pi_*)^{1-\iota_H}) * \pi_t^H + \\ + k_H * \beta * E_t \left(\frac{(C_{t+1} - h * C_t)^{-\sigma_c}}{(C_t - h * C_{t-1})^{-\sigma_c}} * (\pi_{t+1}^H - (\pi_t^H) * (\pi_*)^{1-\iota_H}) * \left(\frac{\pi_{t+1}^H}{\pi_{t+1}}\right)^2 * \pi_{t+1} * \frac{Y_{t+1}}{Y_t} \right) = 0, \quad (5)$$

где $\pi_t = \frac{P_t^{cpi}}{P_{t-1}^{cpi}}$ и $p_t^H = \frac{P_t^H}{P_t^{cpi}}$.

1.2.2. Фирмы-импортеры

Задача фирм-импортеров аналогична задаче отечественных фирм, но они не производят товары, а закупают их за границей и перепродают по более высоким ценам. В этом случае издержки на труд заменяются издержками на покупку товаров:

$$E_{t+i} * \frac{P_{t+i}^{F*}}{P_{t+i}^{cpi}} * Im_{t+i}(k).$$

Учитывая функцию спроса на импортные товары, можем записать прибыль:

⁸ Оба этих правила дают одинаковые уравнения при логлинеаризации.

$$E_t \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{t+i}^i \left(\frac{P_{t+i}^F(k)}{P_{t+i}^{cpi}} \left(\frac{P_{t+i}^F(k)}{P_{t+i}^F} \right)^{\frac{1}{\nu_F}} Im_{t+i} - \varepsilon_{t+i} * \frac{P_{t+i}^{F*}}{P_{t+i}^{cpi}} * \left(\frac{P_{t+i}^F(k)}{P_{t+i}^F} \right)^{\frac{1}{\nu_F}} Im_{t+i} - \frac{k_F}{2} * \right. \\ \left. * \left(\frac{P_{t+i}^F(k)}{P_{t+i-1}^F(k)} - (\pi_{t-1}^F)^{\iota_F} * (\pi_*)^{1-\iota_F} \right)^2 * Im_{t+i} * \frac{P_{t+i}^F}{P_{t+i}^{cpi}} \right),$$

где $P_t^F(k)$ – цена устанавливаемая k -й фирмой-импортером,

Im_t – объем импорта в экономике,

P_t^{F*} – уровень цен зарубежных товаров, $\pi_t^F = \frac{P_t^F}{P_{t-1}^F}$.

Условие первого порядка получаются аналогичными условиям для отечественных фирм и представляют предложение импортных товаров:

$$\left(1 - \frac{1}{\nu_F} \right) + \frac{1}{\nu_F} * rer_t * \frac{1}{p_t^F} - k_F * (\pi_t^F - (\pi_{t-1}^F)^{\iota_F} * (\pi_*)^{1-\iota_F}) * \pi_t^F + k_F * \beta * \\ * E_t \left(\frac{(C_{t+1} - h * C_t)^{-\sigma_c}}{(C_t - h * C_{t-1})^{-\sigma_c}} * (\pi_{t+1}^F - (\pi_t^F)^{\iota_F} * (\pi_*)^{1-\iota_F}) * \left(\frac{\pi_{t+1}^F}{\pi_{t+1}} \right)^2 * \pi_{t+1} * \frac{Im_{t+1}}{Im_t} \right) = 0, \quad (6)$$

где rer_t – реальный обменный курс, задаваемый формулой $rer_t = \frac{\varepsilon_t * P_t^{F*}}{P_t^{cpi}}$.

1.2.3. Фирмы-упаковщики

Фирмы-упаковщики агрегируют отечественные и импортируемые товары в товары конечного потребления с помощью технологии:

$$C_t = A_t^* (Y_t)^\gamma (Im_t)^{1-\gamma}, \quad (7)$$

где A_t^* – эквивалент СФП для фирм-упаковщиков.

При фиксированных затратах фирма хочет получить наибольшее количество товара конечного потребления. Бюджетное ограничение для такой задачи можно записать так:

$$P_t^H * Y_t + P_t^F * Im_t = P_t^{cpi} * C_t = const.$$

Решением оптимизационной задачи являются агрегированные функции спроса на отечественные и импортные товары:

$$p_t^H * Y_t = \gamma * C_t, \quad (8)$$

$$p_t^F * Im_t = (1 - \gamma) * C_t. \quad (9)$$

1.3. Торговый баланс

Динамика чистых иностранных активов записывается следующим образом:

$$\left(R_t^* * rp(b_t^*, p_t^{oil}, e^{RP}) \right)^{-1} * \varepsilon_t * B_t^* = \varepsilon_t * B_{t-1}^* + \varepsilon_t * p_t^{oil} * P_t^{F*} * X_t - \\ - \varepsilon_t * P_t^{F*} * Im_t - \varepsilon_t * P_t^{F*} * dRes_t, \quad (10)$$

где X_t – объем экспорта,

$dRes_t$ – переменная, отвечающая за изменение резервов.

1.4. Денежно-кредитная политика

В данной работе мы используем несколько разных режимов денежно-кредитной политики. Вне зависимости от режима валютного курса, предполагаемого в модели, процентная политика задается правилом:

$$\frac{R_t}{R_*} = \left(\frac{R_{t-1}}{R_*}\right)^{\phi_R} \left(\frac{E_t(\pi_t * \pi_{t+1} * \pi_{t+2} * \pi_{t+3})^{0.25}}{\pi_*}\right)^{(1-\phi_R)\phi_\pi} * \exp^{e_t^R}. \quad (11)$$

Правило при таргетировании реального курса имеет вид

$$rer_t = e^{e_t^\varepsilon} * rer_{ss,t}, \quad (12.a)$$

а при плавающем курсе

$$dRes_t = \left(e^{e_t^\varepsilon} - 1\right) * \frac{1}{A_t * P_t^{cpi}}, \quad (12.b)$$

где $rer_{ss,t}$ – состояние равновесия реального равновесного курса в момент времени t .

Однако стоит отдельно отметить, что не нужно понимать таргетирование реального курса как удержание его на определенном уровне из периода в период. Под таргетированием здесь подразумевается установка курса на уровне, соответствующем текущему уровню цен на нефть, т.е. курсу, который установился бы в долгосрочной перспективе при отсутствии каких-либо шоков. Моделирование постоянного курса в стандартном понимании связано с рядом технических сложностей. Предположение о поддержании постоянного курса в предложенной модели подразумевает отклонение от фундаментально обоснованных долгосрочных уровней на всем периоде удержания курса, что будет постоянно отклонять экономику от равновесия. Моделирование данной динамики может быть проведено аналогично моделированию ZLB (*zero lower bound*) в работе *Kulich et al. (2014)*, но связано с дополнительными допущениями об ожиданиях агентами длительности режима валютного курса. В связи с необходимостью данных предположений, а также рядом дополнительных технических трудностей мы отказываемся от данного метода и следуем более традиционной записи таргетирования отклонения от равновесия.

В работе *Полбина (2014)* было предложено альтернативное правило для моделирования политики ДКП. Автор полагает, что отклонение изменения курса от тренда следует случайному блужданию, и заменяет при этом уравнения для процентных ставок и правило по курсу. Сокращая количество переменных, автор удаляет из модели изменение резервов, что фактически значит ведение политики фиксированного курса с помощью ставок, а не резервной политики.

1.5. Экзогенные процессы

Экзогенные процессы описываются следующими уравнениями:

$$\log A_t = g + \log A_{t-1} + \log z_t^A,$$

$$\log z_t^A = \rho_z * \log z_{t-1}^A + e_t^z,$$

$$z_t^{RP} = \rho_{RP} * z_{t-1}^{RP} + e_t^{RP},$$

$$A_t^* = A^*,$$

$$z_t^\varepsilon = \rho_e * z_{t-1}^\varepsilon + e_t^\varepsilon,$$

$$\log \frac{X_t}{A_t} = \rho_X * \log \frac{X_{t-1}}{A_{t-1}} + e_t^X,$$

$$\log p_t^{oil} = \log p_{t-1}^{oil} + e_t^{oil},$$

где ошибки $e_t^z, e_t^{RP}, e_t^\varepsilon, e_t^X, e_t^{oil}$ являются нормально распределенными и независимы во времени и между собой.

Фактически мы предполагаем, что в экономике существует два тренда: технологический тренд (A_t) и нефтяной тренд (p_t^{oil}). Все остальные экзогенные процессы возвращаются к своему среднему после единовременного шока.

Для простоты модели переменные зарубежной ставки процента и зарубежной инфляции принимались в качестве констант. Инфляция принималась равной 2% в годовом выражении, а ставка – 3,5%.

2. РЕШЕНИЕ И ОЦЕНКА МОДЕЛИ

В данном разделе мы аппроксимируем модель, содержащую единичные корни⁹, следуя *Kim et al. (2008)* и *Lan and Meyer-Gohde (2014)*. Ниже приводится лишь логлинеаризованная модель, система для стационарных состояний может быть найдена в приложении В.

2.1. Логлинеаризованная система

Полученные выше уравнения линеаризуются относительно состояния равновесия в каждый период времени. Для системы из 15 переменных [c , w , l , R , g^ε , d^* , y , p^H, p^F, π , $\pi^H, \pi^F, im, rer, dres$] имеем 15 уравнений:

$$\begin{aligned}
 c_t &= \frac{h * \exp^{-g}}{1 + h * \exp^{-g}} (c_{t-1} - dc_{t,ss}) + \frac{1}{1 + h * \exp^{-g}} E_t c_{t+1} - \frac{1 - h * \exp^{-g}}{1 + h * \exp^{-g}} (R_t - E_t \pi_{t+1}) + \\
 &\quad + \frac{1}{1 + h * \exp^{-g}} (E_t z_{t+1} - h * \exp^{-g} * z_t), \\
 R_t &= R_t^* + E_t g_{t+1}^\varepsilon + a_d * d^* - a_{oil} * p_t^{oil} + z_t^{RP}, \\
 w_t &= \phi * l_t + \frac{1}{(1 - h * \exp^{-g})} (c_t - h * \exp^{-g} * (c_{t-1} - dc_{t,ss}) + h * \exp^{-g} * z_t), \\
 y_t &= l_t, \\
 \pi_t^H &= \frac{\iota_H}{1 + \beta * \iota_H} * \pi_{t-1}^H + \frac{\beta}{1 + \beta * \iota_H} * E_t \pi_{t+1}^H + \frac{1}{k_H * \pi_*^2 * (1 + \beta * \iota_H)} \left(\frac{1}{v_H} - 1 \right) (w_t - p_t^H), \\
 \pi_t^F &= \frac{\iota_F}{1 + \beta * \iota_F} * \pi_{t-1}^F + \frac{\beta}{1 + \beta * \iota_F} * E_t \pi_{t+1}^F + \frac{1}{k_F * \pi_*^2 * (1 + \beta * \iota_F)} \left(\frac{1}{v_F} - 1 \right) (rer_t - p_t^F), \\
 c_t &= \gamma * y_t + (1 - \gamma) * im_t, \\
 p_t^H + y_t &= c_t, \\
 p_t^F + im_t &= c_t, \\
 &= - \left(\frac{R}{g_t^\varepsilon} \right)^{-1} * d_t^* + \left(\frac{R}{g_t^\varepsilon} \right)^{-1} * R_t^* + \left(\frac{R}{g_t^\varepsilon} \right)^{-1} * (a_d * d^* - a_{oil} * p_t^{oil} + z_t^{RP}), \\
 &= -(d_{t-1}^* - dd_{t,ss}) * \frac{\exp^{-g}}{\pi^*} + \frac{\exp^{-g}}{\pi^*} * z_t - \frac{\exp^{-g}}{\pi^*} * (g_t^\varepsilon - \pi_t) + \frac{p^{oil,T} * rer * x}{d^*} p_t^{oil} + \\
 &\quad + \frac{p^{oil,T} * rer * x}{d^*} x_t + \frac{p^{oil,T} * rer * x}{d^*} rer_t - \frac{rer * im}{d^*} rer_t - \frac{rer * im}{d^*} im_t - res_t, \\
 R_t &= \phi_R R_{t-1} + (1 - \phi_R) * \phi_\pi * \pi_t + e_t^R, \\
 rer_t &= z_t^\varepsilon,
 \end{aligned}$$

⁹ Более подробное описание имплементации см. в *Seleznev (2016)* и в приложении Б к данной работе.

$$\begin{aligned}g_t^\varepsilon &= rer_t - (rer_{t-1} - drer_{t,ss}) + \pi_t - \pi_t^*, \\ \pi_t^H &= p_t^H - (p_{t-1}^H - dp_{t,ss}^H) + \pi_t, \\ \pi_t^F &= p_t^F - (p_{t-1}^F - dp_{t,ss}^F) + \pi_t.\end{aligned}$$

Здесь $d_t^* = -b_t^* = -\frac{\varepsilon_t^* P_t^*}{A_t^* P_t^{cpi}}$, а все реальные переменные нормированы на A_t . Система

для изменения стационарных состояний может легко быть получена из системы в приложении В. Дополняя логлинеризованную систему экзогенными процессами и задавая зависимость изменения стационарных состояний от цены на нефть, получаем полную систему уравнений.

2.2. Уравнения наблюдений

Для соотнесения модели с данными используются шесть временных рядов, начиная со II квартала 2003 года и заканчивая III кварталом 2015 года или I кварталом 2013 года в зависимости от модели. Для оценки используются прирост ВВП, прирост экспорта, инфляция, ставка процента (усредненная однодневная MIACR), изменение курса рубля к доллару и изменение цен на нефть¹⁰. При этом уравнения, связывающие наблюдения с моделью, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}dlogy_t^{obs} &= g + z_t^A + \frac{C}{Y} * (c_t - c_{t-1} + dc_{t,ss}) + \frac{X}{Y} * (x_t - x_{t-1}) - \\ &\quad - \frac{IM}{Y} * (im_t - im_{t-1} + dim_{t,ss}) + e_t^{y,obs}, \\ dlogx_t^{obs} &= g + z_t^A + (x_t - x_{t-1}) + e_t^{x,obs}, \\ log\pi_t^{obs} &= log\pi_{ss} + \pi_t + e_t^{\pi,obs}, \\ logR_t^{obs} &= 4 * (logR_{ss} + R_t) + e_t^{\pi,obs}, \\ log\left(\frac{\mathcal{E}_t^{obs}}{\mathcal{E}_{t-1}^{obs}}\right) &= g_{ss}^\varepsilon + g_t^\varepsilon + e_t^{g^\varepsilon,obs}, \\ log\left(\frac{p_t^{oil,obs}}{p_{t-1}^{oil,obs}}\right) &= e_t^{p-oil}.\end{aligned}$$

2.3. Оценка модели

Оценка модели производится с помощью байесовской эконометрики¹¹. В данной работе используется стандартный алгоритм Метрополиса–Гастингса с вспомогательной нормальной плотностью (обратный гессиан после оптимизации используется в качестве

¹⁰ Показатели инфляции, ВВП и экспорта были сезонно скорректированными. При этом, когда в расчетах в дальнейшем используется ИПЦ, мы просто складываем сезонно сглаженные приросты. Также за неимением данных в реальном времени используются данные доступные на февраль 2016 года.

¹¹ При оценке мы исключаем решения с *sunspot shocks*.

ковариационной матрицы¹²). Сохраняется 50 000 итераций, из которых выбрасывается первая половина. Более подробное описание и альтернативные методы оценки можно найти в работе *Herbst and Schorfheide (2015)* и *Fernandez-Villaverde et. al (2016)*.

Таблица с априорными распределениями параметров приведена в приложении А.

Константы $\frac{X}{Y}$ и $\frac{IM}{Y}$ калибруются на уровне 0,3 и 0,22. Эти значения были получены как средние за период, когда цены на нефть находились чуть выше 100 долл. за баррель. Параметр β выбирался таким образом, чтобы реальная равновесная ставка была равна 3,5%. Равновесная инфляция в модели равняется 4%¹³.

2.4. Результаты

Мы оценили модель с фиксированным курсом на периоде со II квартала 2003 года по I квартал 2013 года и модель с плавающим курсом на периоде со II квартала 2003 года по III квартал 2015 года. Параметры апостериорных распределений приведены в таблицах 2 и 3. На рисунках 2 и 3 показаны импульсные отклики в обеих моделях на шок цен на нефть в 10% для выпуска, инфляции, ставки и изменении курса¹⁴. Сравнение откликов приведено на рисунке 4. Для выпуска, инфляции и курса на рисунке 4 показаны накопленные трансформации средних откликов, для ставки – средний отклик уровня. Отклик в модели с фиксированным курсом оказывается значительно слабее по сравнению с моделью плавающего курса, однако необходимо отметить, что долгосрочное влияние в линеаризованной модели с фиксированными параметрами на реальные переменные не зависит от денежно-кредитной политики и полученная разница является следствием различия в оценках параметров модели.

Влияние на ВВП после 10 кварталов оценивается как 0,65% в модели с фиксированным курсом и 2% в модели с плавающим курсом. Аналогичные показатели для уровня цен равны 1 и 3,7%, для курса – 6 и 19%.

Далее мы приводим ряд сравнительных признаков моделей и обсуждаем полученные результаты, однако сначала необходимо отметить одно из свойств модели с фиксированным курсом. Наблюдаемые переменные в этой модели не реагируют на шок премии за риск. Это происходит из-за того, что центральный банк, поддерживая реальный курс на уровне долгосрочного равновесия, полностью нивелирует шоки риск-премии изменением резервов. Так, получается, что в уравнении для паритета риск-шок компенсируется изменением уровня долга, а в уравнении платежного баланса

¹² Оценка произведена в программном пакете *Dynare (Adjemian et al. (2011))*.

¹³ Параметры калибровки можно найти в таблице 2 в приложении А.

¹⁴ Далее, говоря об изменении, мы подразумеваем разность логарифмов, умноженную на 100, под ставкой – $100 * \log(1 + i_t)$, под инфляцией – $100 * \log(1 + \pi_t)$.

дополнительное изменение долга уравнивается изменением резервов. Таким образом, уравнения для динамики всех остальных переменных остаются неизменными, и, как следствие, курс остается на постоянном уровне. Аналогичная ситуация и с шоком экспорта, однако он влияет на сам экспорт как на наблюдаемую переменную и на ВВП как его компонента. Влияние остальных шоков представлено на рисунке 5¹⁵. В течение всего периода шок совокупной факторной производительности вносил основной вклад в динамику прироста ВВП, оказывая понижающее давление на инфляцию и ставки (за исключением конца 2008 года и начала 2009). Как показывает декомпозиция инфляции, ставки были недостаточно высокими для того чтобы удержать инфляцию на уровне 4%. Шок денежно-кредитной политики являлся одной из главных детерминант инфляции, а также влиял на номинальный курс из-за того что реальный курс оставался фиксированным и по построению влиял на ставку процента. Динамика цен на нефть в среднем способствовала укреплению валютного курса, однако в отдельные моменты (при падении цен на нефть) приводила к ослаблению курса. В некоторой мере это транслировалось в цены, и как следствие, в ставку процента. Резервная политика также вносила в основном дезинфляционный вклад.

2.5. Сравнение моделей

Для сопоставления моделей в данной работе мы используем сравнение декомпозиций, импульсные отклики при медианных параметрах, RMSE и предельные плотности. Понимая при этом, что использовались разные наборы данных, мы считаем для каждой модели предельную плотность для 40 и 50 наблюдений и сравниваем их.

2.5.1. Декомпозиция и импульсные отклики

Пользуясь байесовской эконометрикой, можно получить лишь распределения параметров, а декомпозиция проводится для определенного значения. В качестве такого значения в данном разделе принимается мода апостериорного распределения. Декомпозиция для прироста выпуска, инфляции, ставки и изменения курса для обеих моделей приведена на рисунках 5 и 6. Основной детерминантой роста модели с фиксированным курсом была совокупная факторная производительность. При этом в модели с плавающим курсом рост также определялся ценой на нефть и шоком на валютном рынке. Однако наиболее интересной для сравнения оказывается пара «ставка – инфляция». При относительно похожем вкладе шоков ДКП в инфляцию в модели с

¹⁵ Необходимо отметить, что декомпозиция дана при определенных значениях параметров и показывает разложение на шоки лишь при этих параметрах (и «средних» шоках). В байесовской концепции параметры имеют некое распределение, а как следствие и декомпозиция тоже. Также, полученная декомпозиция показывает интерпретацию шоков из модели, которая может быть неверной ввиду неправильной спецификации модели

плавающим курсом они практически не вносят вклад в процентную ставку, что кажется странным. Чтобы продемонстрировать этот факт более наглядно, посмотрим на импульсные отклики на рисунке 7. В модели с фиксированным курсом при увеличении ставок на 1 п.п. реакция инфляции в ближайшие четыре квартала не превосходит 0,5%, а в модели с плавающим курсом – 1,5%. Учитывая значительное различие и сравнивая полученные отклики с откликами на аналогичные шоки в работах по другим странам (*Cristoffel et al. (2008)*, *Christiano et al. (2010)* и *Adolfson et al. (2013)*), мы приходим к выводу, что реакция экономики на шок ДКП является менее стандартной для модели с плавающим курсом.

Также в модели с плавающим курсом в значительной мере присутствуют начальные значения в декомпозиции как в наблюдаемых (см. ставку процента), так и в ненаблюдаемых переменных (например, реальный валютный курс), что тоже косвенно свидетельствует в пользу модели фиксированным курсом.

Такой небольшой отклик ВВП в модели с фиксированным курсом по сравнению с работами *Сунякова и др. (2015)* и *Idrisov et al. (2015)* может быть следствием нескольких причин. Во-первых, в данной работе не оценивалось долгосрочное влияние, а лишь влияние через 10 кварталов. Во-вторых, обе приведенные выше работы являются калиброванными в отличие от данной работы, где все связи оцениваются на данных. В-третьих, по сравнению с работой *Idrisov et al. (2015)* данная работа обладает более бедной структурой. Так, мы обнаруживаем корреляцию более 0,5 между сглаженными оценками шоков (*smoothed shocks*) нефти в текущий период и шоками СФП в следующий. Эта связь, возможно, может быть объяснена рядом причин, таких как возникновение тех или иных ограничений на заимствования. Например, в модели Банка России с добавлением капитала данная корреляция меньше¹⁶.

2.5.2. Предельная плотность

В данном исследовании также было проведено сравнение предельных плотностей моделей, которые являются вероятностями данных при условии модели. Как описывалось выше, во избежание возникновения проблемы с разными длинами выборки в моделях мы в первом случае удлиняем выборку для модели с фиксированным курсом, а во втором – сокращаем в модели с плавающим курсом. Сравнение предельных плотностей тоже говорит о предпочтительности модели с фиксированным курсом перед моделью с плавающим. Из таблицы 3 видно, что для обеих оценок предельных плотностей при каждой из длин выборки большие значения получаются в случае модели с фиксированным курсом.

¹⁶ Ряд приложений из более большой модели и ее структура приведены в приложении Г.

2.5.3. RMSE

В отличие от сравнения импульсных откликов, декомпозиции и предельных плотностей анализ RMSE дает противоречивые результаты. Здесь мы сравниваем прогнозы¹⁷ на шесть периодов, начиная с III квартала 2010 года, для приростов выпуска, уровня цен и валютного курса, а также для уровней выпуска, цен, курса и процентной ставки при заданной цене на нефть. Отношение квадратов RMSE представлено в таблице 4¹⁸.

Из таблицы 4а видно, что модель с плавающим курсом менее точна по сравнению с моделью с фиксированным курсом. Однако это связано с тем, что модель слишком чувствительна к априорным распределениям. Так, импульсные отклики на шок цен на нефть меняют знак только на 50-й точке, что приводит, например, к росту ВВП в начальные периоды после падения цен на нефть (см. рисунки 11–13). Для того чтобы избежать данной ситуации, мы меняем первый параметр априорного распределения для a_d на 0,01. В таблице 4б показано отношение квадратов RMSE для этой модели и модели с фиксированным курсом. Для прогноза уровня ВВП наилучшей однозначно оказывается модель с плавающим курсом, а для прогноза валютного курса лучшей оказывается модель с фиксированным курсом. Для оценки уровня цен в долгосрочном периоде также лучшей оказывается модель с фиксированным курсом. Определение ставки однозначно лучше оказывается в модели с плавающим курсом. Остальные соотношения не являются столь очевидными и требуют проведения формальных тестов, которые не проводились в данной работе¹⁹.

Дополнительно прогнозные свойства модели сравниваются с BVAR-моделью. Из тех же шести переменных строится BVAR-модель с априорными распределениями, как в *Giannone et al. (2015)*. Из таблицы 4в несложно заметить, что BVAR оказывается лучше модели с фиксированным курсом по ВВП, однако проигрывает по всем остальным показателям. При этом модель BVAR сравнима по прогнозу уровня ВВП с альтернативной моделью с плавающим курсом.

2.6. Расширения модели и робастность результатов

В данном разделе проверяется, насколько хороша аппроксимация модели и насколько результаты обусловлены спецификацией. Учитывая короткую длину выборки, мы оцениваем влияние априорных распределений на апостериорное.

¹⁷ Используются модальные прогнозы для DSGE и средние прогнозы для BVAR. Использование средних прогнозов для DSGE не сильно изменяет результаты (проводилось сравнение для модели с фиксированным курсом).

¹⁸ Не проводилось никакого формального теста на статистическую значимость различий RMSE в стиле работы *Diebold and Mariano (1995)* ввиду слишком короткой выборки.

¹⁹ Результаты по всем остальным критериям меняются лишь численно при изменении априорного распределения для a_d .

2.6.1. Нелинейное решение

Используя линейную аппроксимацию, мы, возможно, теряем важные нелинейности. Так, может получиться, что при реальной цене нефти 100 и 10 долларов за баррель влияние различных шоков на экономику будет сильно отличаться. Для нелинейных моделей²⁰ с медианными параметрами, взятыми из оценок линейных моделей, импульсные отклики на 10-процентный шок цен на нефть изображены на рисунках 8 и 9. На рисунке 8 несложно заметить, что импульсный отклик не сильно изменяется при различных значениях цен на нефть, и это является следствием сингулярности модели при стремлении цены нефти к нулю. Это происходит из-за предположения о производственной функции упаковщиков (при стремлении импорта к нулю потребление тоже стремится к нулю) и о стремлении импорта к нулю при стремлении цены на нефть к нулю. Если добавить в модель ненефтяной экспорт, то форма отклика будет такой, как показано на рисунке 10²¹. Таким образом, нелинейности в модели могут оказывать значительное влияние в зависимости от типа модели, это видно и из рисунка 9 для модели с плавающим курсом.

2.6.2. Чувствительность коэффициентов к априорному распределению

Для модели с фиксированным курсом мы проверяем чувствительность апостериорных средних к априорным, следуя *Muller (2012)*. Фактически аппроксимируется изменение апостериорного среднего при изменении априорного на 1. Якобиан при некоторых технических предположениях может быть выражен как

$$J = \Sigma_{\pi} * \Sigma_p^{-1}.$$

Из приведенных в таблице 5 значений несложно увидеть, что большинство параметров достаточно чувствительны к априорным распределениям, что отражает проблемы, связанные с длиной выборки и, возможно, их идентифицируемостью.

²⁰ Подробнее о построении импульсных откликов для нелинейных моделей см. *Seleznev (2016)*.

²¹ Данный график приведен для иллюстрации, поэтому параметры не оценивались, а были взяты из модели без ненефтяного экспорта. Доля нефтяного экспорта полагалась 0,66. Оценка моделей для нелинейной модели с наблюдаемым трендом может быть произведена с использованием стандартного фильтра Калмана, а с ненаблюдаемым – с помощью фильтра частиц, условного фильтра частиц или процедуры с отдельным сэмплением трендов (см. *Seleznev (2016)*).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы рассмотрели несколько структурных линейных моделей с малым количеством уравнений для российской экономики. Несмотря на все проблемы, связанные с сильной зависимостью от априорных значений и неправильной спецификацией, данные модели не так плохи в сравнении с BVAR-моделями. Так, для каждой из четырех рассматриваемых в работе переменных была найдена модель, которая способна не (по ВВП) и даже (по всем остальным переменным) предсказывать поведение рассматриваемых макроэкономических переменных при заданной цене на нефть. Однако декомпозиция и импульсные отклики позволяют усомниться в правильности предложенных спецификаций, что оставляет поле для дальнейших исследований. Даже малоразмерные модели, но с другой спецификацией могут дать более приемлемые результаты.

Для расширения могут быть использованы модели с более богатой структурой, такие как приведенная в приложении Г, и модели с нелинейностями как в трендовой, так и в циклической части. Помимо добавления капитала добавление хорошо прописанного бюджета, валютного рынка и банковского сектора могут значительно улучшить свойства модели и интерпретируемость ее результатов. К примеру, ставка межбанковского рынка в начале используемой выборки значительно отличалась от ставок по кредитам конечным заемщикам. В конце выборки дифференциал этих ставок стал меньше. Введение банковского сектора и меняющегося правила ДКП потенциально могут решить данную проблему.

Для прогнозирования также могут быть использованы комбинации прогнозов: BMA (*Koop (2003)*), DMA (*Raftery et al. (2010)*), pooling (*Amisano and Geweke (2013)*), dynamic pooling (*Del Negro et al. (2016)*) и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adjemian A., Bastani H., Juillard M., Mihoubi F., Perendia P., Ratto M., Villemot S. Dynare: reference manual, version 4 // Dynare Working Papers. 2011. № 1.
2. Adolfson M., Laséen S., Christiano L., Trabandt M., Walentin K. Ramses II – Model Description // Occasional Paper Series. 2013. No. 12, Sveriges Riksbank.
3. Amisano G., Geweke J. Prediction using several macroeconomic models // ECB Working Paper Series. 2013. No.1537.
4. Aruoba B., Cuba-Borda P., Schorfheide F. Macroeconomic Dynamics Near the ZLB: A Tale of Two Countries // Manuscript. 2016
5. Burgess S., Fernandez-Corugedo E., Groth C., Harrison R., Monti F., Theodoridis K., Waldron M. The Bank of England's Forecasting Platform: COMPASS, MAPS, EASE and the Suite of Models // Bank of England, Staff Working Paper. 2013. No. 471.
6. Calvo G. Staggered Prices in a Utility-Maximizing Framework // Journal of Monetary Economics. 1983. Vol. 12 (3). P. 383–398.
7. Christiano L., Rostagno M., Motto R. Financial factors in economic fluctuations // ECB Working Paper Series 2010. No. 1192.
8. Christoffel K., Coenen G., and Warne A. The New Area-Wide Model of the Euro Area: A Micro-Founded Open-Economy Model for Forecasting and Policy Analysis // ECB Working Paper Series.2008. No. 944.
9. Del Negro M., Hasegawa R. B., Schorfheide F. Dynamic Prediction Pools: An Investigation of Financial Frictions and Forecasting Performance // Journal of Econometrics. 2016. Vol. 191 (2). P. 391–405.
10. Diebold F.X., Mariano R. Comparing Predictive Accuracy // Journal of Business and Economic Statistics 1995. Vol. 13.P. 253–265.
11. Diebold F.X., Schorfheide F., Shin M. Real-Time Forecast Evaluation of DSGE Models with Stochastic-Volatility // Manuscript, University of Pennsylvania. 2016.
12. Domit S., Monti F., Sokol A. A Bayesian VAR benchmark for COMPASS // Bank of England, Staff Working Paper. 2016. No. 583.
13. Edge R., Gurkaynak R. How Useful Are Estimated DSGE Model Forecasts for Central Bankers? // Brookings Papers on Economic Activity, Economic Studies Program, The Brookings Institution. 2010. Vol. 41 (2), P. 209–259.
14. Giannone D., Lenza M., Primiceri G. Prior Selection for Vector Autoregressions // The Review of Economics and Statistics, MIT Press. 2015. Vol. 97 (2),P. 436–451.
15. Gorodnichenko Y., Ng S. Estimation of DSGE Models When the Data are Persistent // Journal of Monetary Economics. 2010. Vol. 57 (3). P. 325–340.

16. Herbst E., Schorfheide F. Bayesian Estimation of DSGE Models // Princeton University Press. 2015.
17. Idrisov G., Kazakova M., Polbin A. A theoretical interpretation of the oil prices impact on economic growth in contemporary Russia // Russian Journal of Economics. 2015. Vol. 1. P. 257–272.
18. Iversen J., Laséen S., Lundvall H., Soderstrom U. Real-Time Forecasting for Monetary Policy Analysis: The Case of Sveriges Riksbank // Working Paper Series. 2016. No. 318, Sveriges Riksbank.
19. Fernandez-Villaverde J., Gordon G., Guerron-Quintana P., Rubio-Ramirez J. Nonlinear adventures at zero lower bound // Journal of Economic Dynamics and Control. 2015. Vol. 57. P. 182–204.
20. Fernandez-Villaverde J., Rubio-Ramirez J., Schorfheide F. Solution and Estimation Methods for DSGE Models // Handbook of Macroeconomics. 2016. Vol. 2. (preliminary draft).
21. Kim J., Kim H., Schaumburg E., Sims C. Calculating and Using Second-Order Accurate Solutions of Discrete Time Dynamic Equilibrium Models // Journal of Economic Dynamics and Control. 2008. Vol. 32. P. 3397–3414.
22. Koop G. Bayesian Econometrics. 2003. John Wiley, Chichester.
23. Korinek A. Thoughts on DSGE Macroeconomics: Matching the Moment, But Missing the Point? // Paper for Conference «A Just Society» honoring Joseph Stiglitz's 50 years of teaching. 2015.
24. Kulish M., Morley J., Robinson T. Estimating DSGE Models with Forward Guidance // Discussion paper 2014-23, School of Economics, The University of New South Wales.
25. Lan H., Meyer-Gohde A. Solvability of perturbation solutions in DSGE models // Journal of Economic Dynamics and Control. 2014. Vol. 45. P. 366-388.
26. Linde J., Smets F., Wouters R. Challenges for Macro Models Used at Central Banks // Handbook of Macroeconomics. 2015. Vol. 2. (preliminary and incomplete draft).
27. Lubik T., Matthes C. Indeterminacy and Learning: An Analysis of Monetary Policy in the Great Inflation // FRB of Richmond Working Paper. 2014. No.14-02.
28. Maliar L., Maliar S. Merging Simulation and Projection Approaches to Solve High-Dimensional Problems with an Application to a New Keynesian Model // Quantitative Economics. 2015. Vol. 6. P. 1–47.
29. Medina J.P., Soto C. Models for Analysis and Simulations: A Small Open Economy DSGE for Chile. 2006 (preliminary draft).
30. Muller U. Measuring Prior Sensitivity and Prior Informativeness in Large Bayesian Models // Journal of Monetary Economics. 2012. Vol. 59. P. 581–597.

31. Raftery A.E., Karny M., Ettler, P. Online Prediction Under Model Uncertainty Via Dynamic Model Averaging: Application to a Cold Rolling Mill // *Technometrics*, 2010. Vol. 52, P. 52–66.
32. Rotemberg J. Monopolistic Price Adjustment and Aggregate Output // *Review of Economic Studies*, Oxford University Press. 1982. Vol. 49 (4). P. 517–531.
33. Seleznev S. Solutions and estimation of DSGE models with stochastic trends. 2016 (forthcoming).
34. Walsh C. *Monetary Theory and Policy* // The MIT Press, Cambridge, Massachusetts. 2010.
35. Полбин А. Эконометрическая оценка структурной макроэкономической модели для российской экономики // *Прикладная эконометрика*. № 33 (1).
36. Синяков А., Ройтман А., Селезнев С. Динамика потенциального ВВП России после нефтяного шока: роль сильного изменения относительных цен и структурных жесткостей // *Центральный банк Российской Федерации. Серия докладов об экономических исследованиях*. № 6.

Приложение А

Таблица 1а. Априорные и апостериорные распределения в модели с плавающим валютным курсом

	Априорное среднее	Апостериорное среднее	90%-й доверительный интервал		Тип априорного распределения	Априорное стандартное отклонение
h	0,7	0,697	0,652	0,740	beta	0,1
$g + 1$	1,005	1,006	1,005	1,007	norm	0,0005
φ	2	3,09	1,79	4,29	norm	1
ι_H	0,5	0,40	0,15	0,63	beta	0,15
ι_F	0,5	0,66	0,48	0,83	beta	0,15
k_H	0,3	0,66	0,24	1,08	gamma	0,2
k_f	0,3	0,35	0,25	0,45	gamma	0,2
φ_r	0,7	0,75	0,70	0,81	beta	0,05
φ_π	1,5	1,67	1,38	1,93	norm	0,2
ρ_z	0,2	0,48	0,34	0,64	beta	0,1
ρ_e	0,7	0,77	0,63	0,91	beta	0,1
ρ_{RP}	0,5	0,53	0,34	0,74	beta	0,1
ρ_X	0,7	0,73	0,59	0,87	beta	0,1
α_d	0,03	0,004	0,0035	0,0048	invg	3
$\alpha_{p_{oil}}$	0,33	0,12	0,07	0,17	invg	3
σ_R	0,003	0,005	0,004	0,006	invg	4
σ_z	0,005	0,010	0,007	0,013	invg	4
σ_e	0,001	0,049	0,020	0,077	invg	4
σ_X	0,005	0,020	0,015	0,024	invg	4
σ_{RP}	0,001	0,002	0,0003	0,004	invg	4
$\sigma_{p_{oil}}$	0,1	0,16	0,14	0,19	invg	4

Таблица 16. Априорные и апостериорные распределения в модели с фиксированным валютным курсом

	Априорное среднее	Апосте- риорное среднее	90%-й доверительный интервал		Тип априорного распре- деления	Априорное стандартное отклонение
h	0,7	0,77	0,73	0,81	beta	0,1
$g + 1$	1,005	1,0020	1,0005	1,0035	norm	0,001
φ	2	2,24	0,90	3,47	norm	1
ι_H	0,5	0,29	0,10	0,48	beta	0,15
ι_F	0,5	0,44	0,24	0,66	beta	0,15
k_H	0,3	0,26	0,04	0,53	gamma	0,2
k_f	0,3	0,15	0,08	0,22	gamma	0,2
φ_r	0,7	0,81	0,75	0,86	beta	0,05
φ_π	1,5	1,41	1,12	1,71	norm	0,2
ρ_z	0,2	0,46	0,26	0,65	beta	0,1
ρ_e	0,7	0,62	0,50	0,74	beta	0,1
ρ_X	0,7	0,71	0,57	0,86	beta	0,1
a_d	0,05	0,04	0,01	0,07	invg	3
$a_{p_{oil}}$	0,33	0,63	0,47	0,80	norm	0,1
σ_R	0,003	0,006	0,004	0,007	invg	4
σ_z	0,005	0,015	0,010	0,020	invg	4
σ_e	0,005	0,054	0,040	0,068	invg	4
σ_X	0,005	0,022	0,016	0,028	invg	4
$\sigma_{p_{oil}}$	0,1	0,16	0,13	0,19	invg	4

Таблица 2. Калибровка модели

Параметр	Значение
$\frac{X}{\bar{Y}}$	0,3
$\frac{Im}{Y}$	0,22
R_{SS}	0,075
π_{SS}	0,01
R^*	0,035
π^*	0,005
$\sigma_{y_{obs}}$	0,003
$\sigma_{\pi_{obs}}$	0,004
$\sigma_{R_{obs}}$	0,01
$\sigma_{e_{obs}}$	0,02
$\sigma_{X_{obs}}$	0,008

Таблица 3. Оценки предельных плотностей

Количество точек	Метод аппроксимации	Фиксированный курс	Плавающий курс
40	Аппроксимация Лапласа	454,0	434,5
	Модифицированное гармоническое среднее	455,3	439,1
50	Аппроксимация Лапласа	583,1	525,1
	Модифицированное гармоническое среднее	583,5	525,5

Таблица 4а. Отношение квадратов RMSE в моделях с плавающим и фиксированным курсом

	Прирост выпуска	Инфляция	Прирост курса	Выпуск	Уровень цен	Валютный курс	Ставка процента
I кв.	1,39	2,92	5,12	1,39	2,92	5,12	2,73
II кв.	1,55	2,84	5,00	1,57	2,82	7,84	3,77
III кв.	2,01	4,48	4,34	1,88	5,73	13,51	6,08
IV кв.	2,69	5,49	4,41	2,01	8,74	14,52	8,20
V кв.	3,56	5,48	4,42	2,04	8,80	15,64	9,01
VI кв.	4,96	5,42	4,40	2,10	8,58	17,41	9,82

Таблица 4б. Отношение квадратов RMSE в альтернативной модели с плавающим курсом и модели с фиксированным курсом

	Прирост выпуска	Инфляция	Прирост курса	Выпуск	Уровень цен	Валютный курс	Ставка процента
I кв.	1,02	0,89	2,71	1,02	0,89	2,71	0,25
II кв.	0,96	1,38	2,44	0,77	1,32	3,83	0,32
III кв.	0,86	1,86	1,97	0,51	2,68	7,36	0,79
IV кв.	0,94	1,23	1,95	0,41	3,06	6,27	0,81
V кв.	1,33	1,13	2,13	0,37	3,14	6,33	0,71
VI кв.	1,63	1,46	2,16	0,34	3,33	7,45	0,65

Таблица 4в. Отношение квадратов RMSE в BVAR-модели с и модели с фиксированным курсом

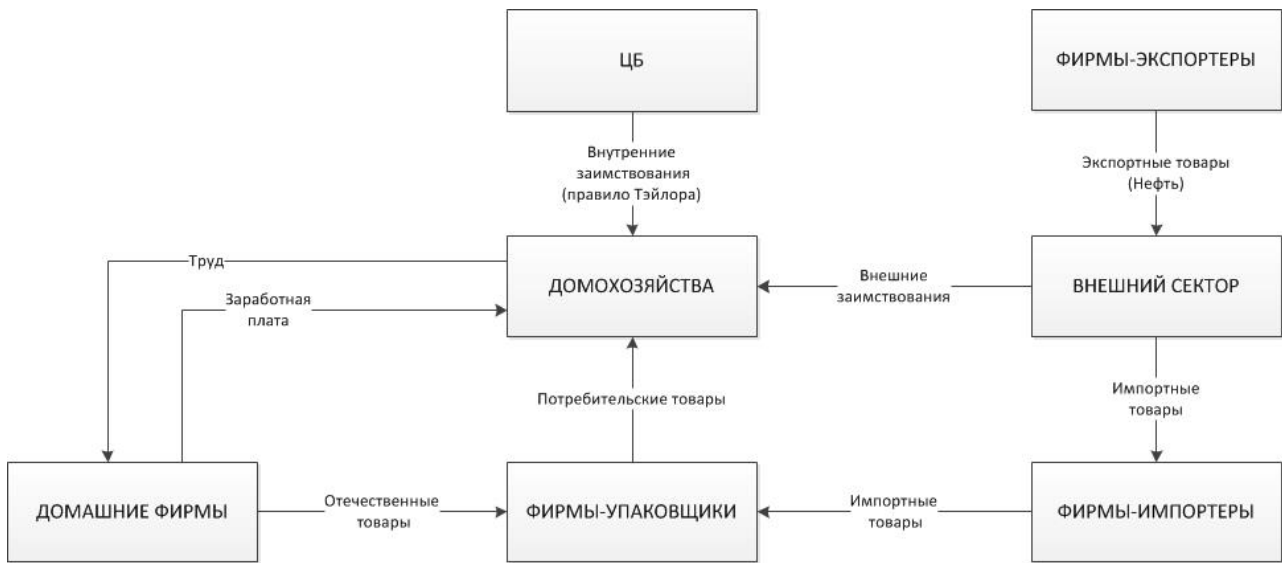
	Выпуск	Уровень цен	Валютный курс	Ставка процента
I кв.	0,96	1,94	2,04	1,36
II кв.	0,58	1,80	3,02	1,25
III кв.	0,53	1,46	3,93	1,41
IV кв.	0,37	1,89	4,68	1,85
V кв.	0,25	1,91	5,58	2,15
VI кв.	0,26	1,91	6,29	2,37

Таблица 5. Чувствительность апостериорных средних к априорным²²

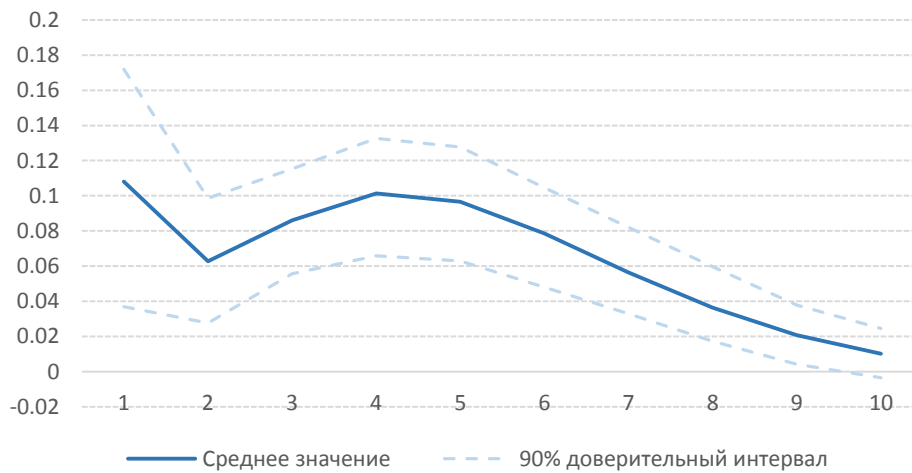
Параметр	Чувствительность
h	0,06
$g + 1$	0,90
φ	0,60
ι_H	0,67
ι_F	0,72
k_H	0,84
k_f	0,04
φ_r	0,45
φ_π	0,90
ρ_z	1,57
ρ_e	0,62
ρ_X	0,85
α_d	0,06
α_{poil}	0,97
σ_R	0,37
σ_z	0,28
σ_e	7,84
σ_X	3,25
σ_{poil}	0,11

²² Данные результаты, возможно, являются следствием вычислительных проблем при моделировании обратного гамма-распределения.

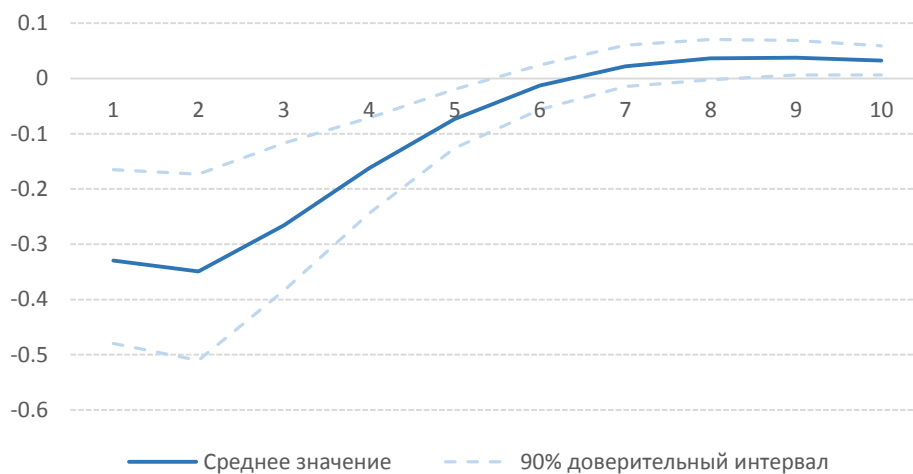
Рисунок 1. Схема описываемой экономики

Рисунок 2. Импульсный отклик на 10%-е²³ увеличение нефтяных цен в модели с фиксированным курсом

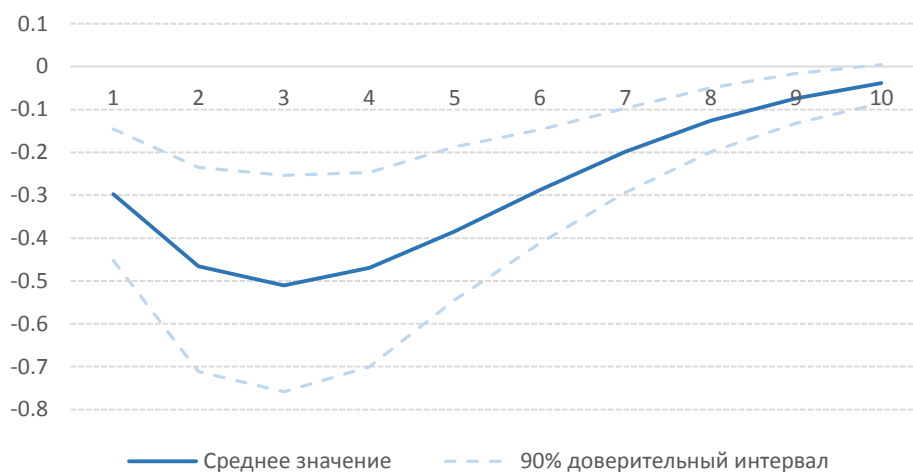
Прирост ВВП, QoQ, %

²³ Шок нормирован таким образом, что медианный отклик в первый период составил 10%.

Инфляция, QoQ, %



Ставка процента, %



Изменение курса, %

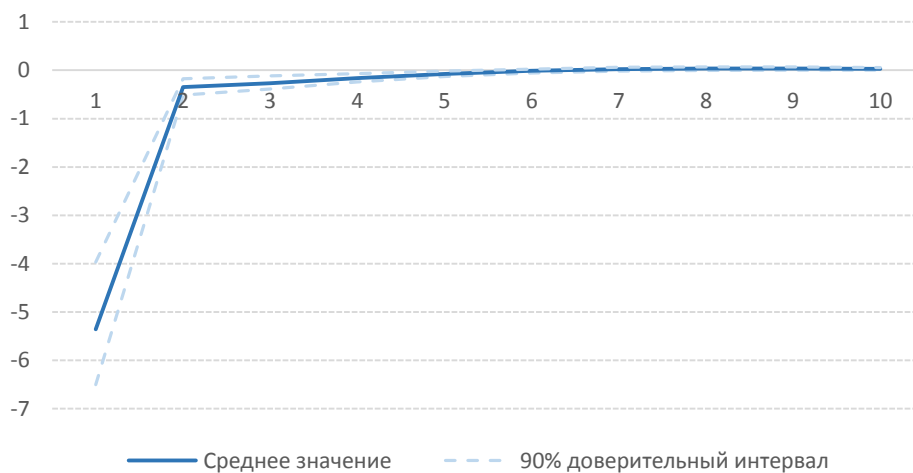
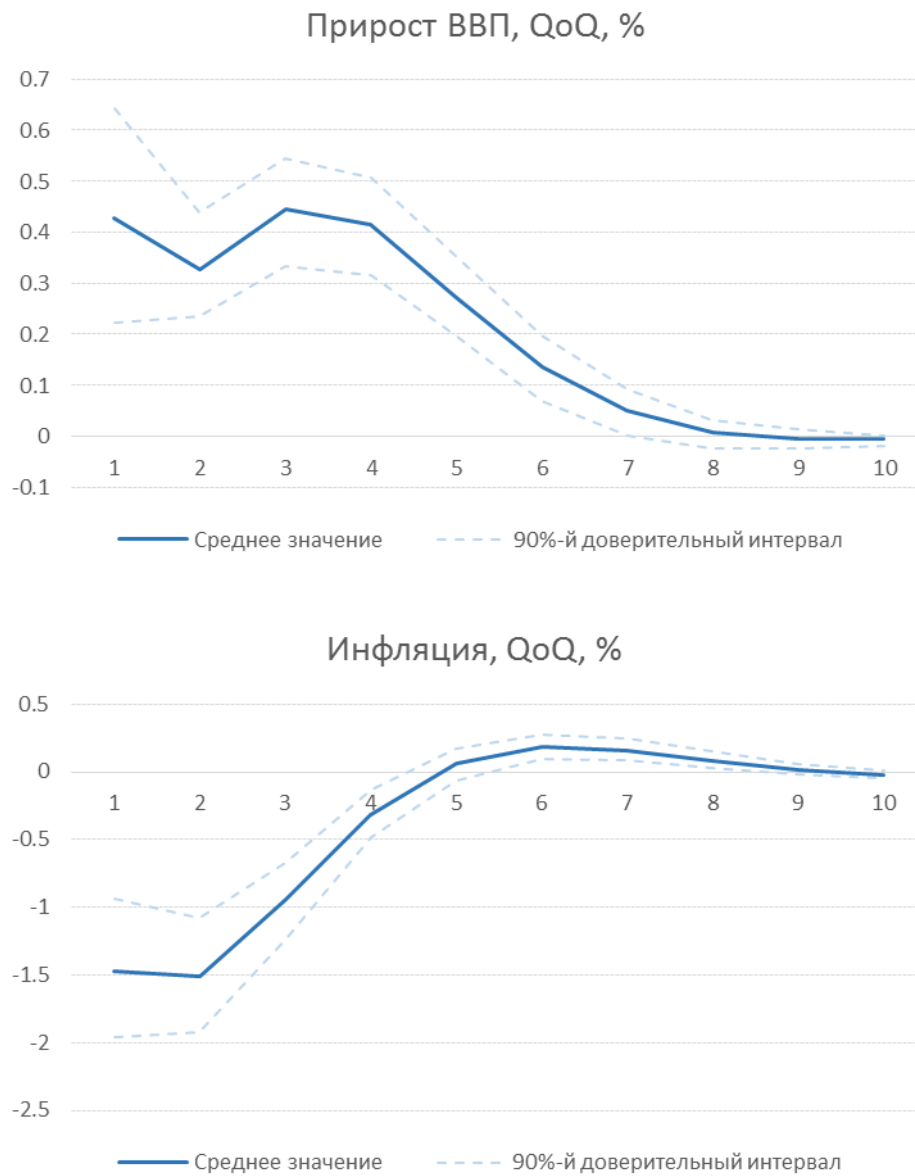


Рисунок 3. Импульсный отклик на 10%-е увеличение нефтяных цен в модели с плавающим курсом

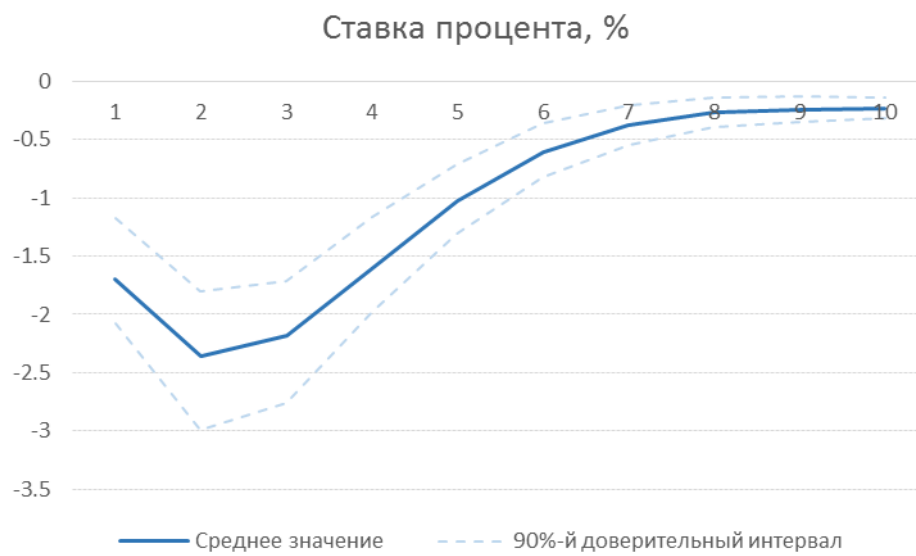
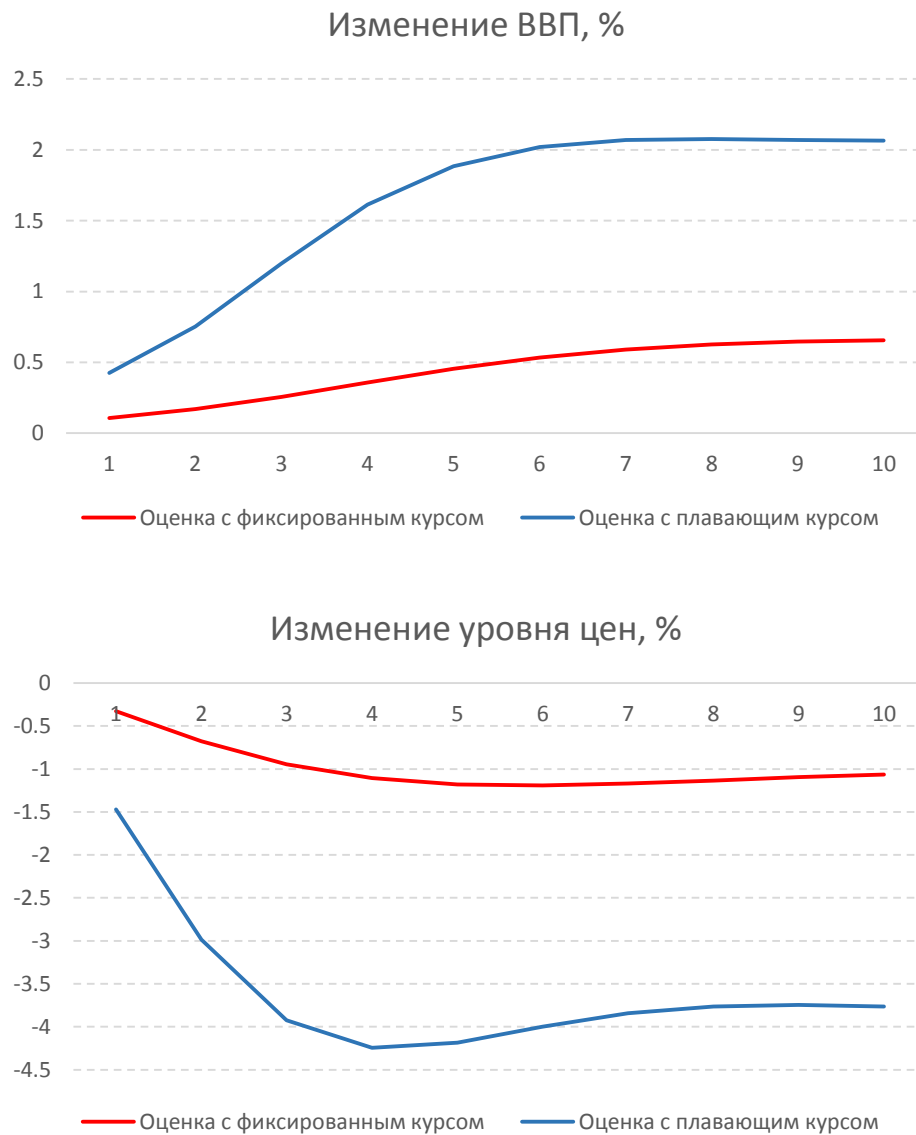
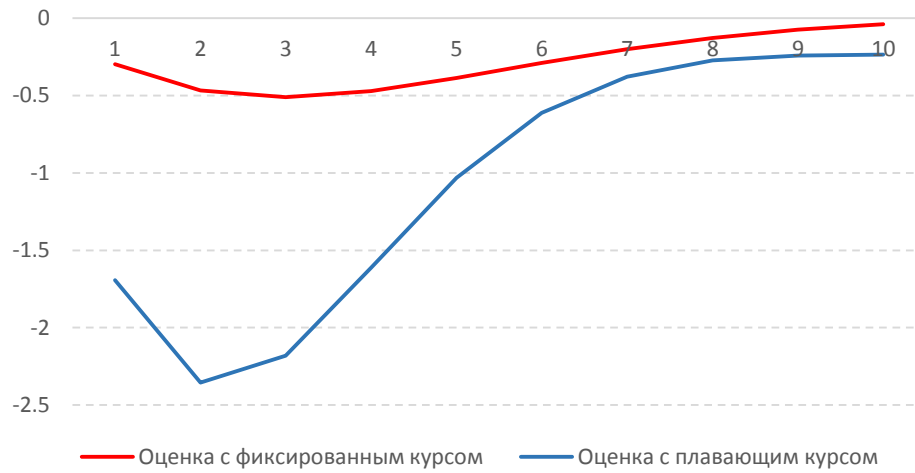


Рисунок 4. Сравнение импульсных откликов на 10%-е увеличение нефтяных цен

Процентная ставка, %



Изменение курса, %

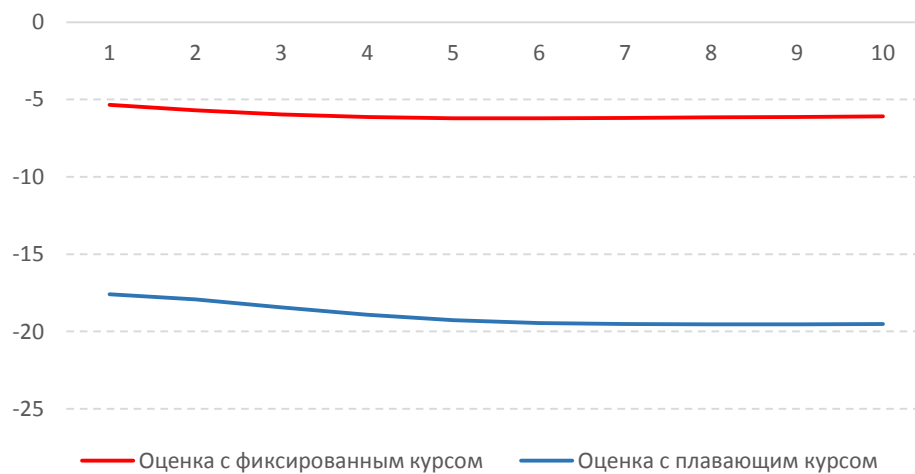
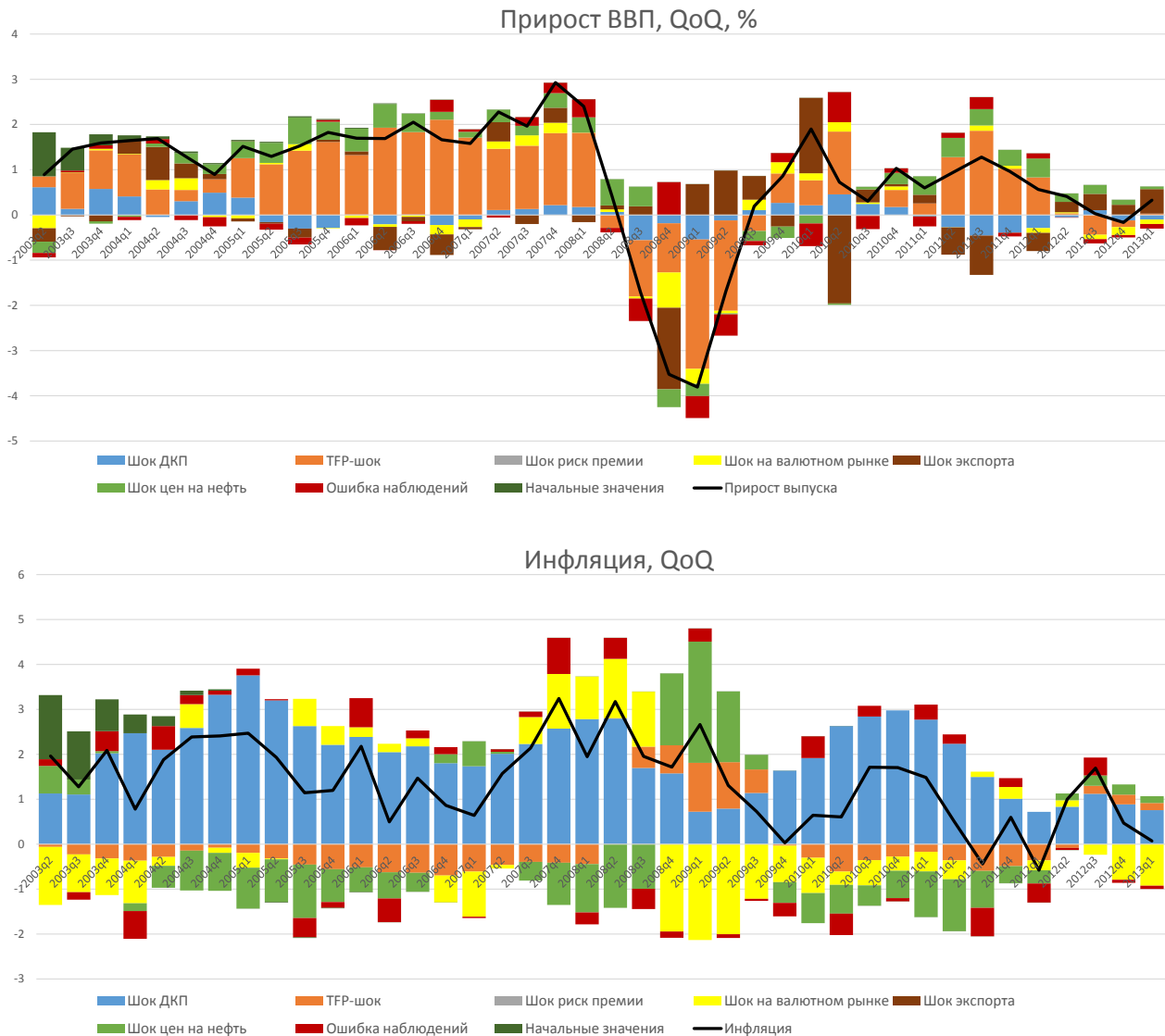
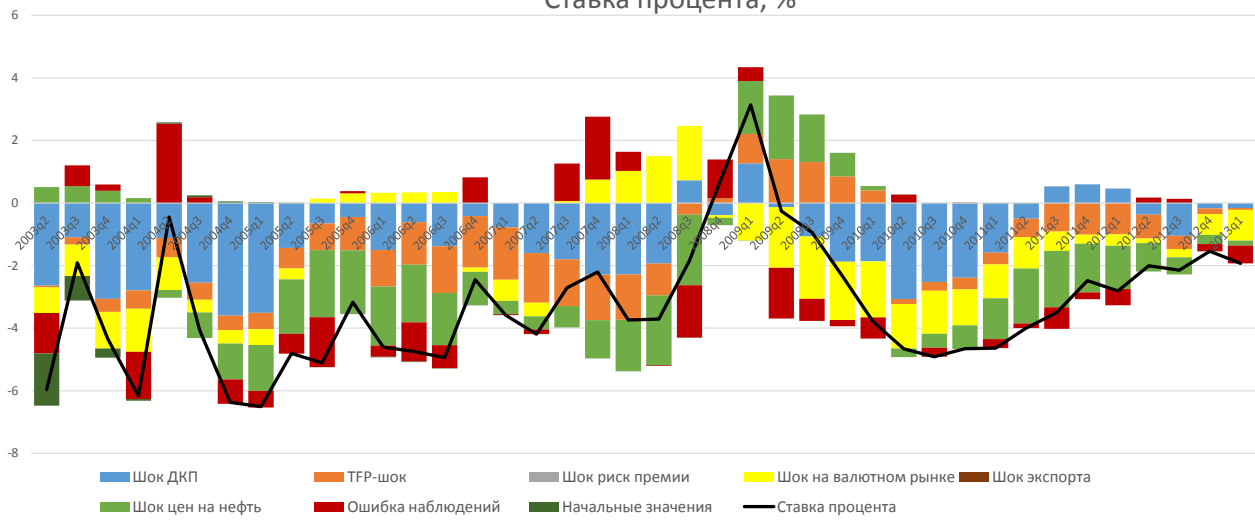


Рисунок 5. Историческая декомпозиция в модели
с фиксированным курсом

Ставка процента, %



Изменение курса, %

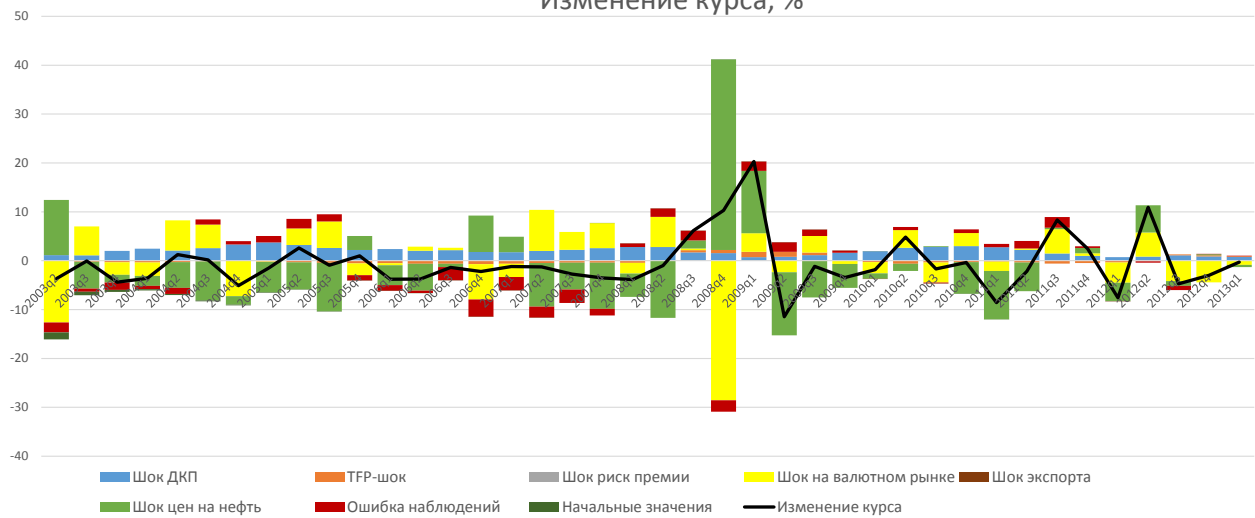
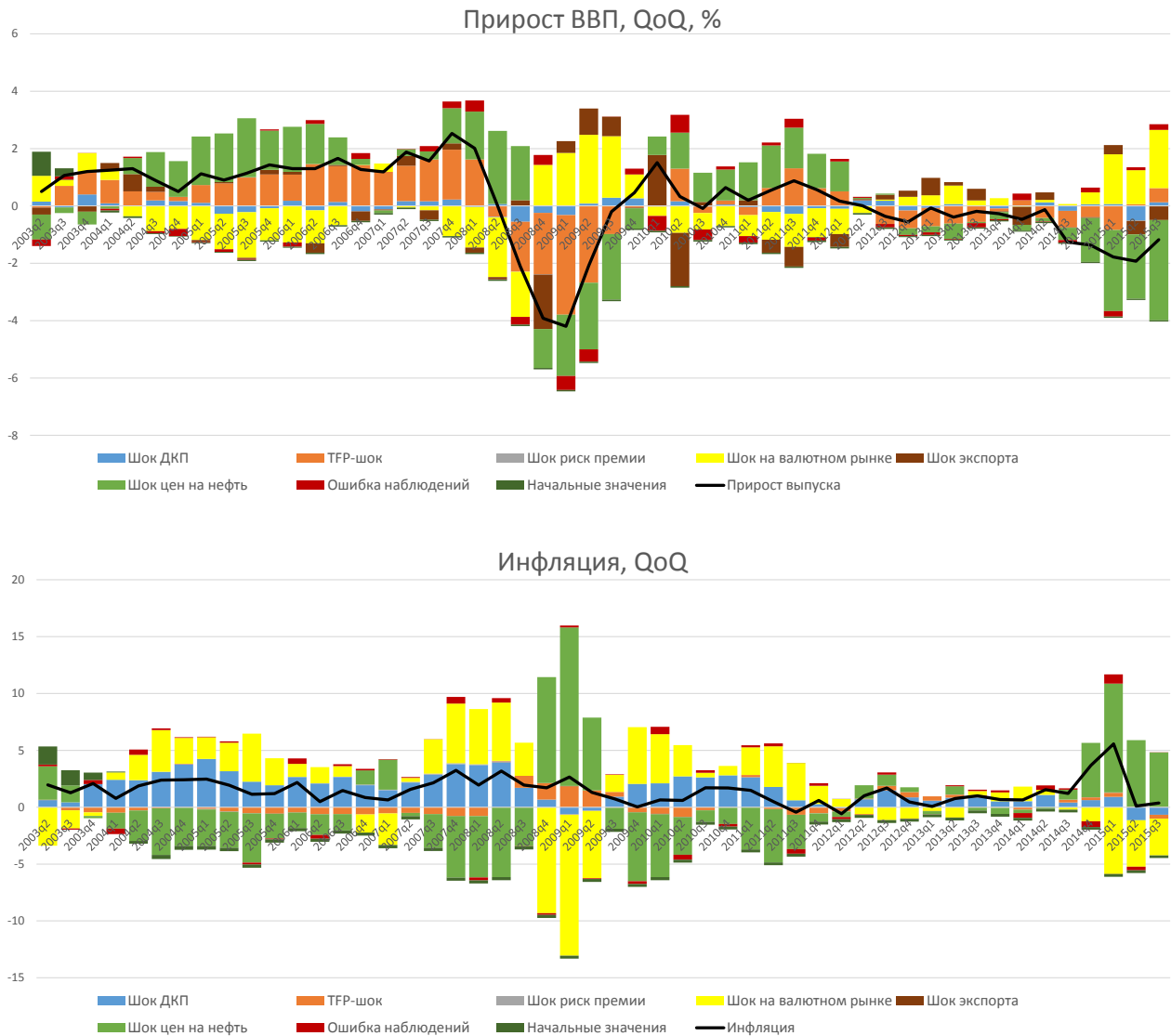


Рисунок 6. Историческая декомпозиция в модели с плавающим курсом



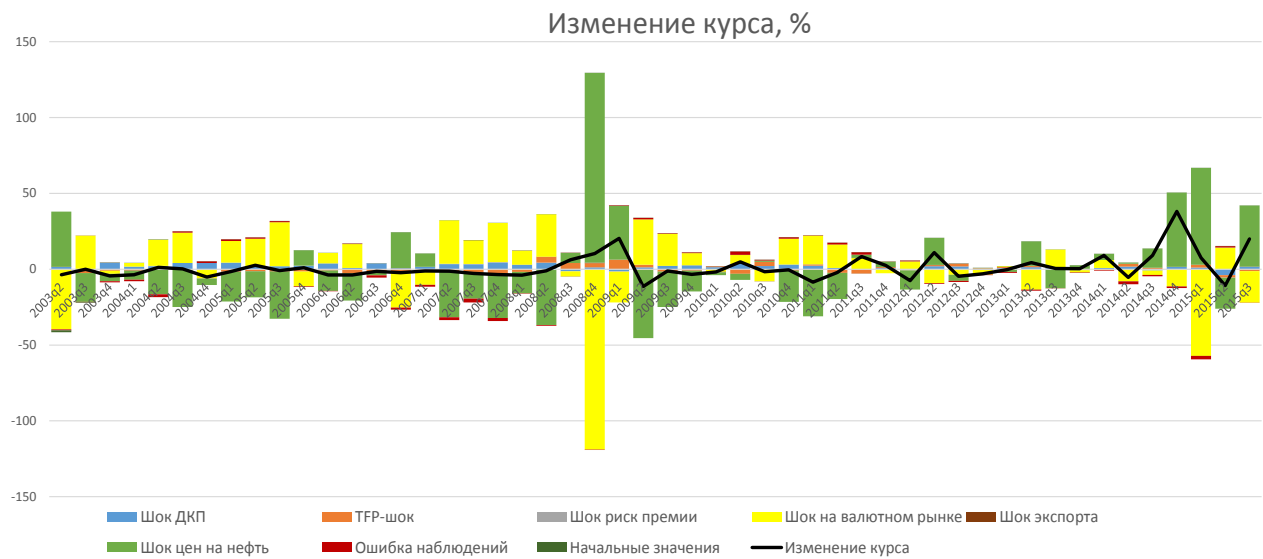
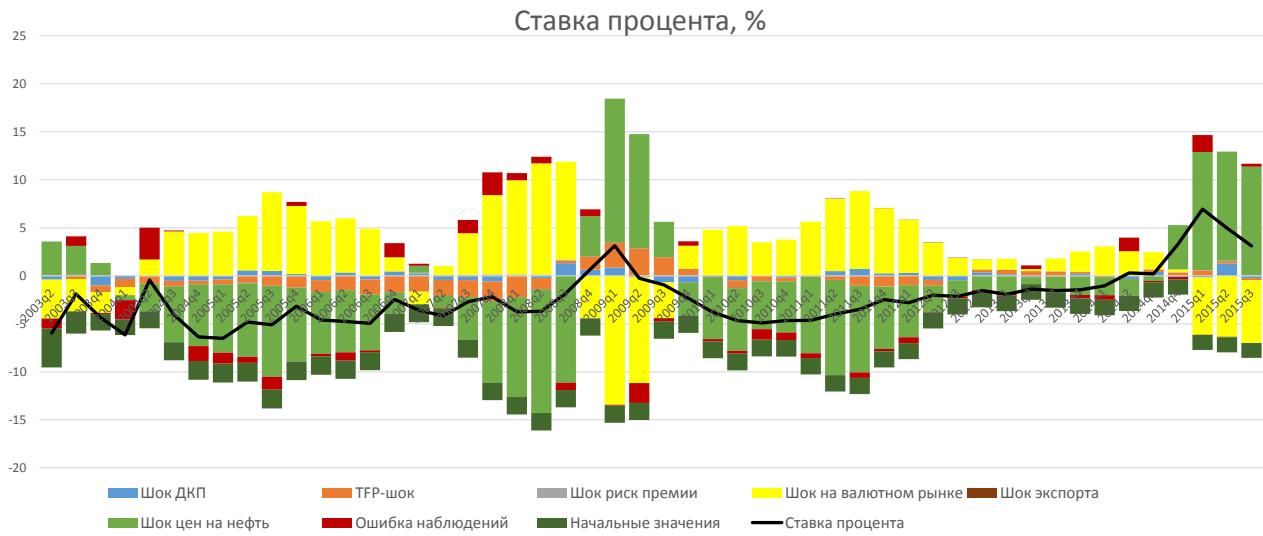
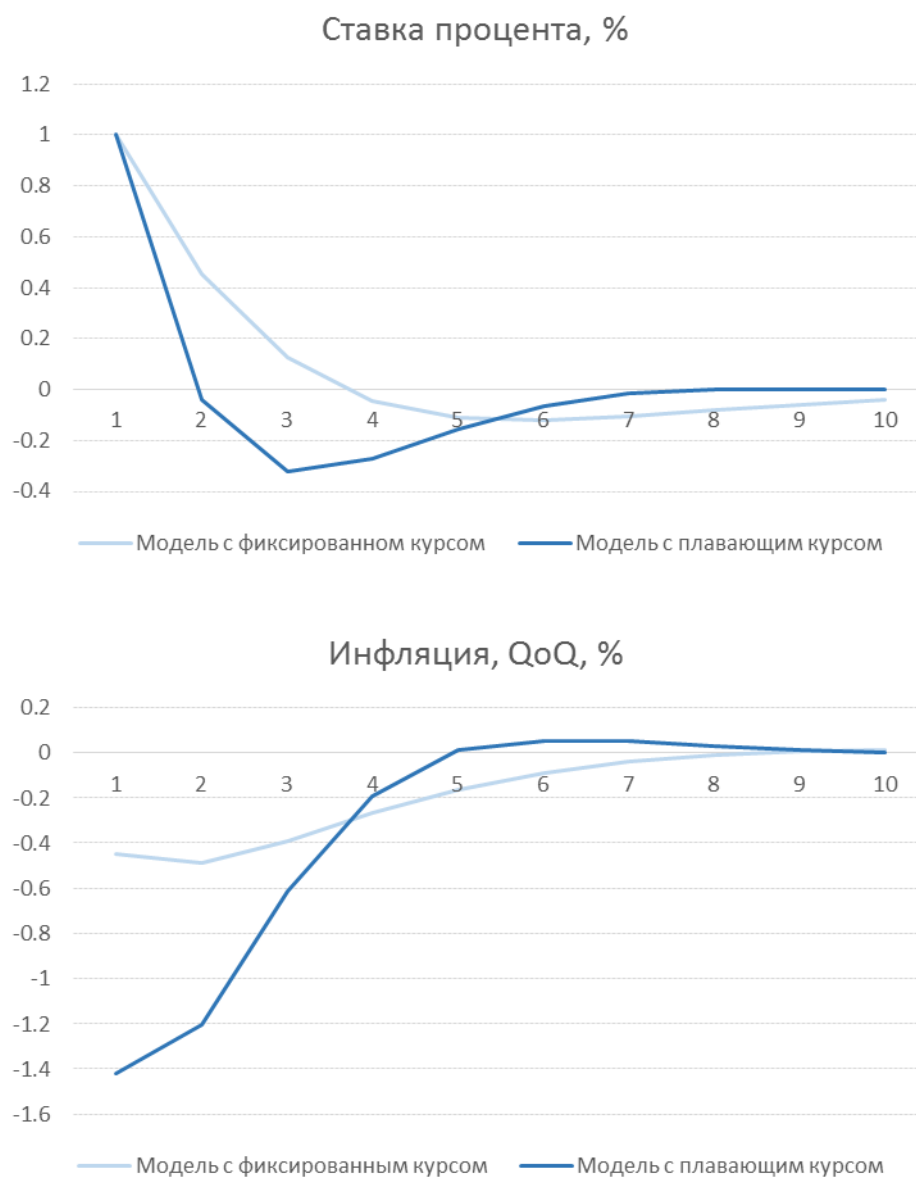


Рисунок 7. Импульсные отклики на шок ДКП²⁴

²⁴ Шок нормирован таким образом, чтобы отклик ставки в первый период равнялся 1.

Рисунок 8. Импульсные отклики выпуска на нефтяной шок в зависимости от цены нефти при средних значениях параметров в модели с фиксированным курсом

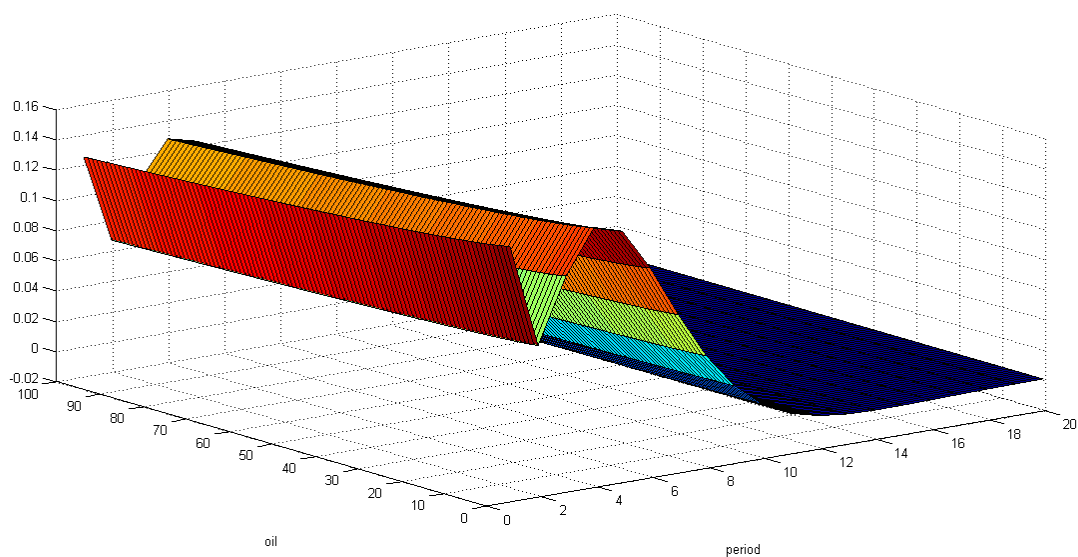


Рисунок 9. Импульсные отклики выпуска на нефтяной шок в зависимости от цены нефти при средних значениях параметров в модели с плавающим курсом

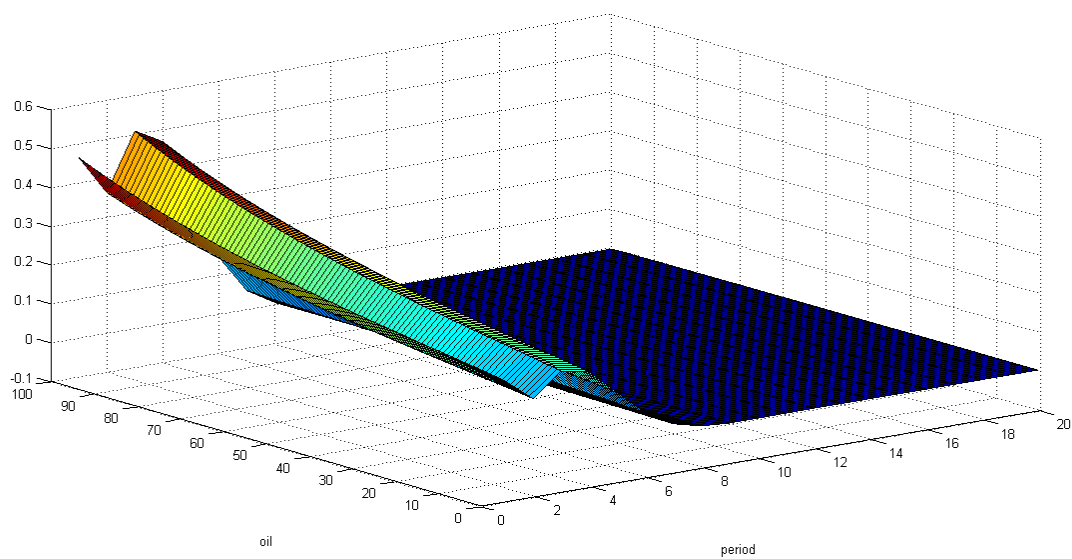


Рисунок 10. Импульсные отклики выпуска на нефтяной шок в зависимости от цены нефти при средних значениях параметров в несингулярной модели с фиксированным курсом

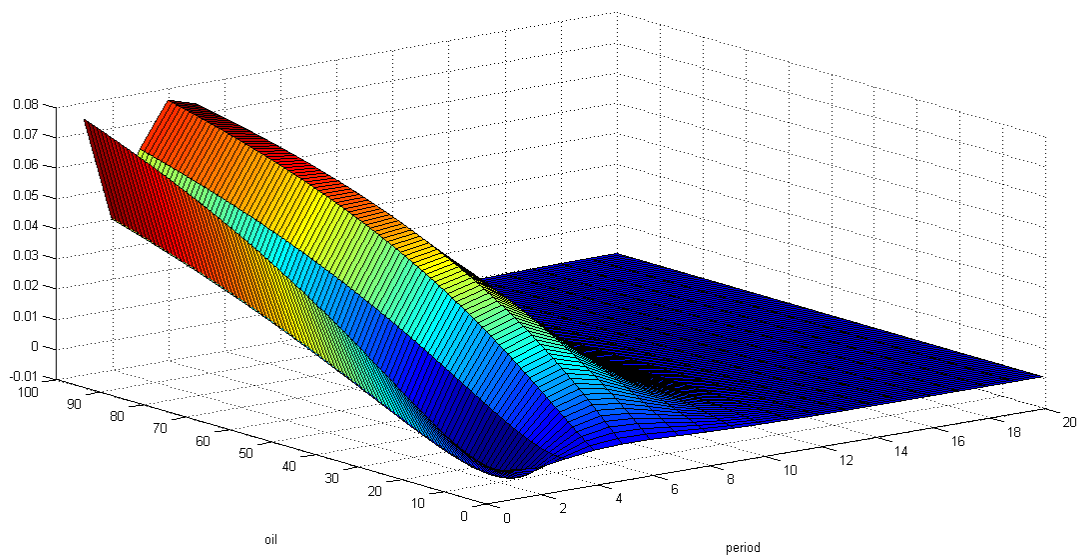
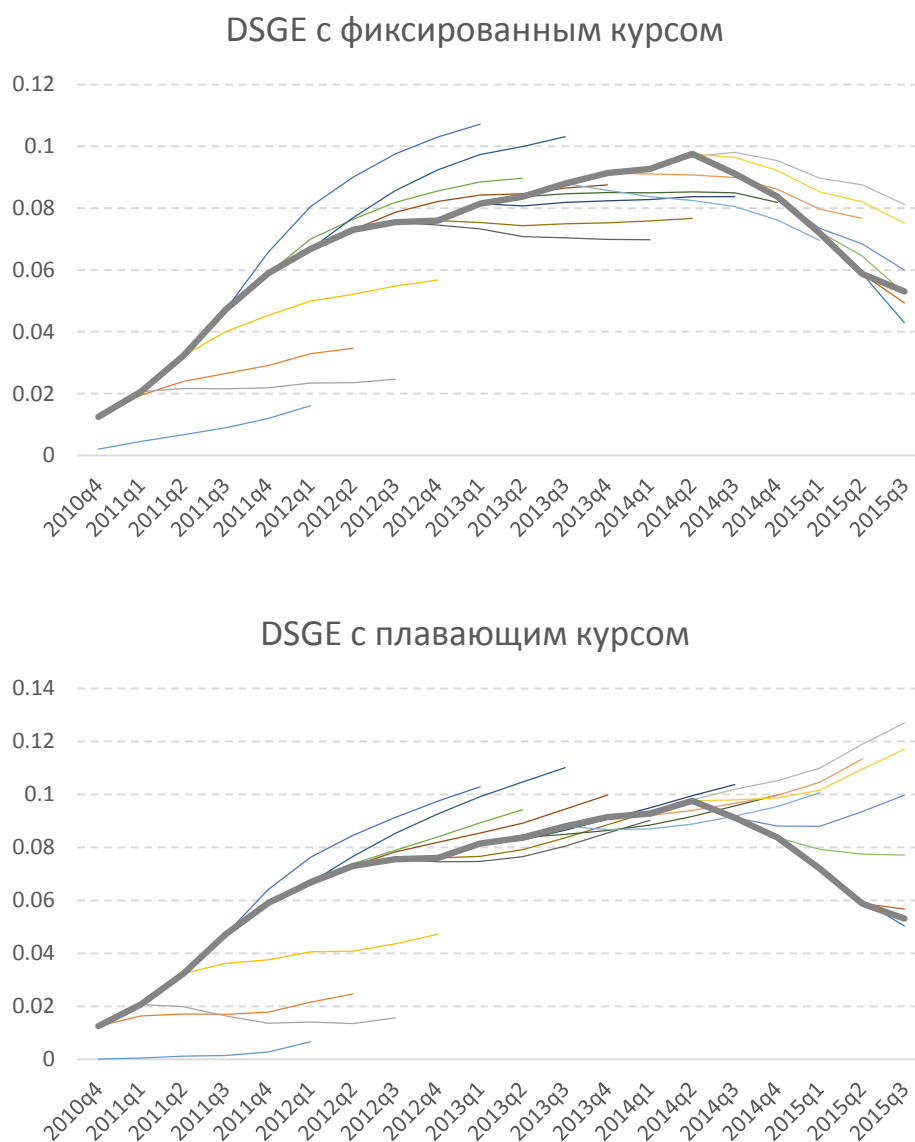
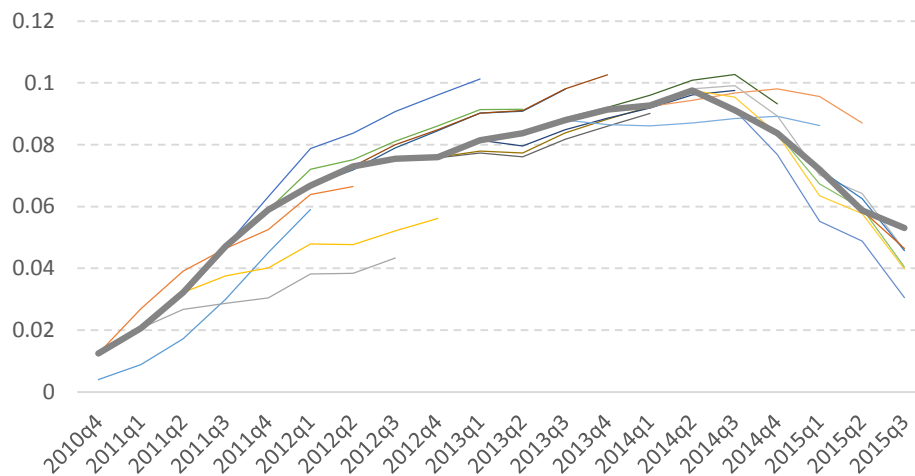


Рисунок 11. Прогнозные и реализовавшиеся траектории выпуска (логарифмическая шкала)

Альтернативная DSGE с плавающим курсом



BVAR

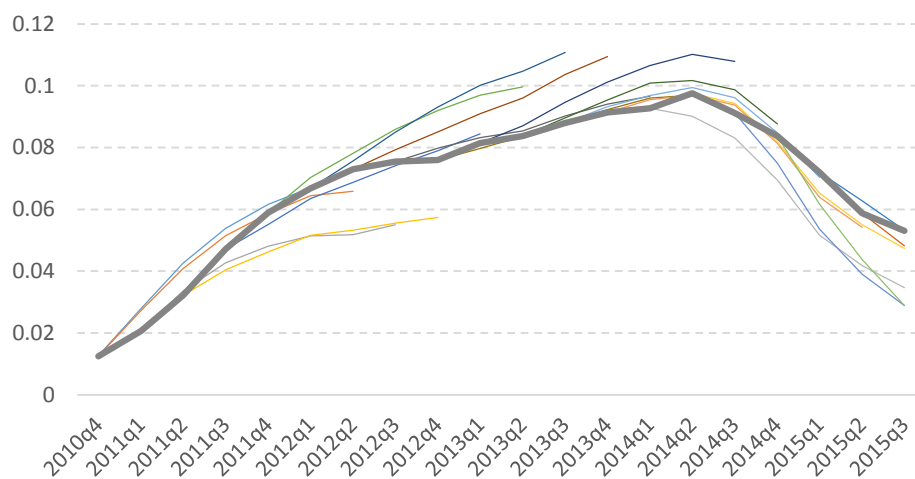
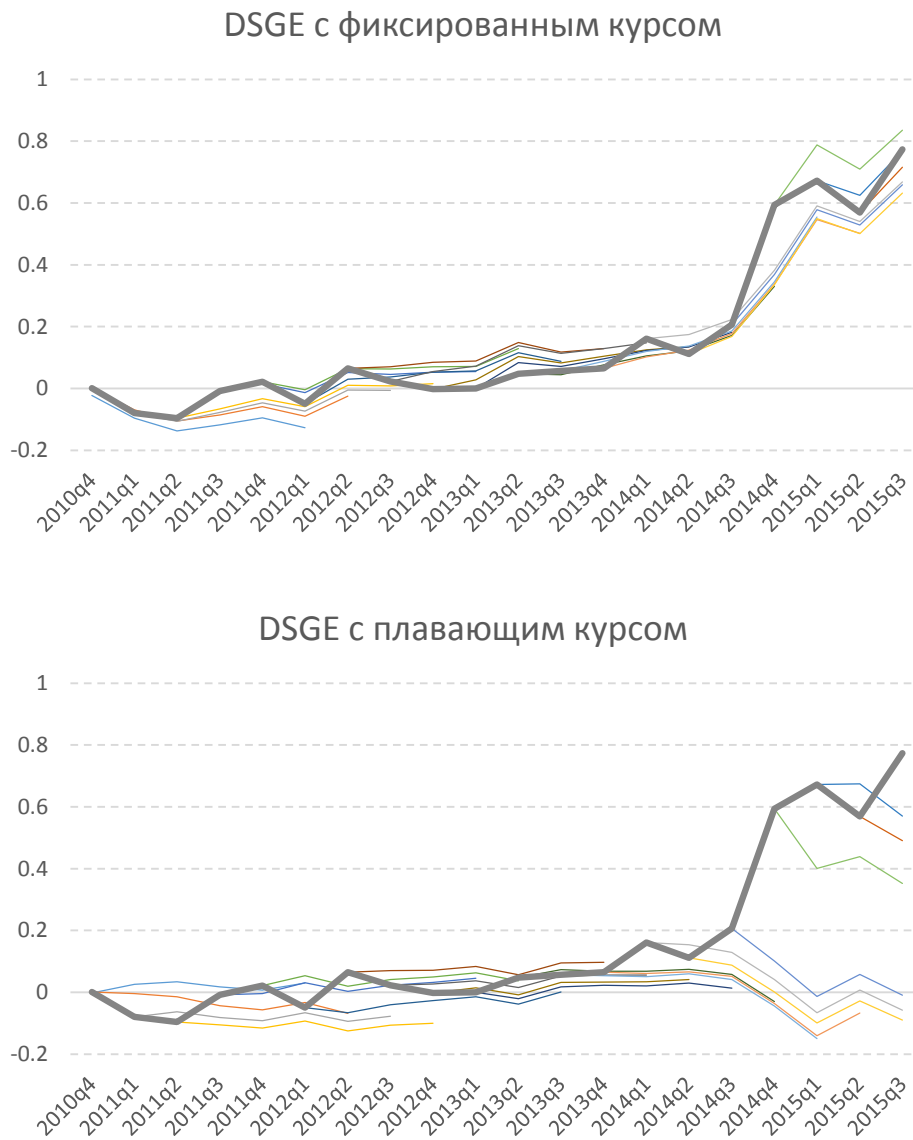
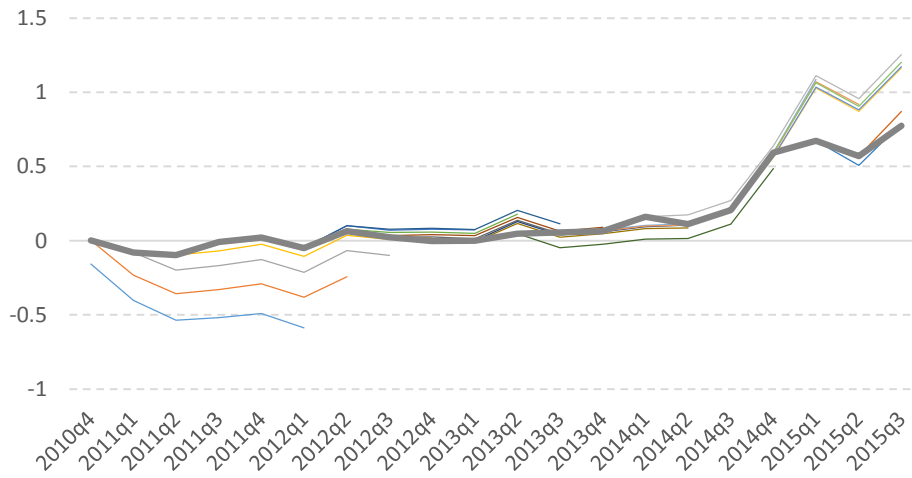
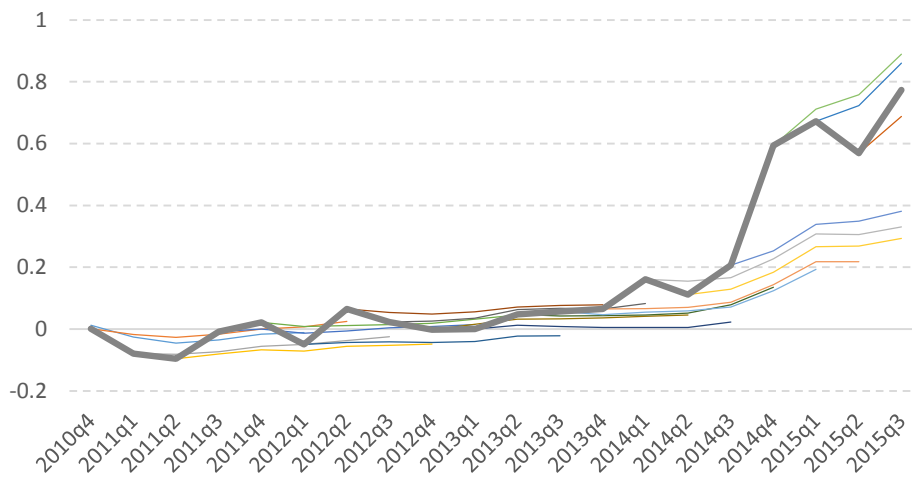


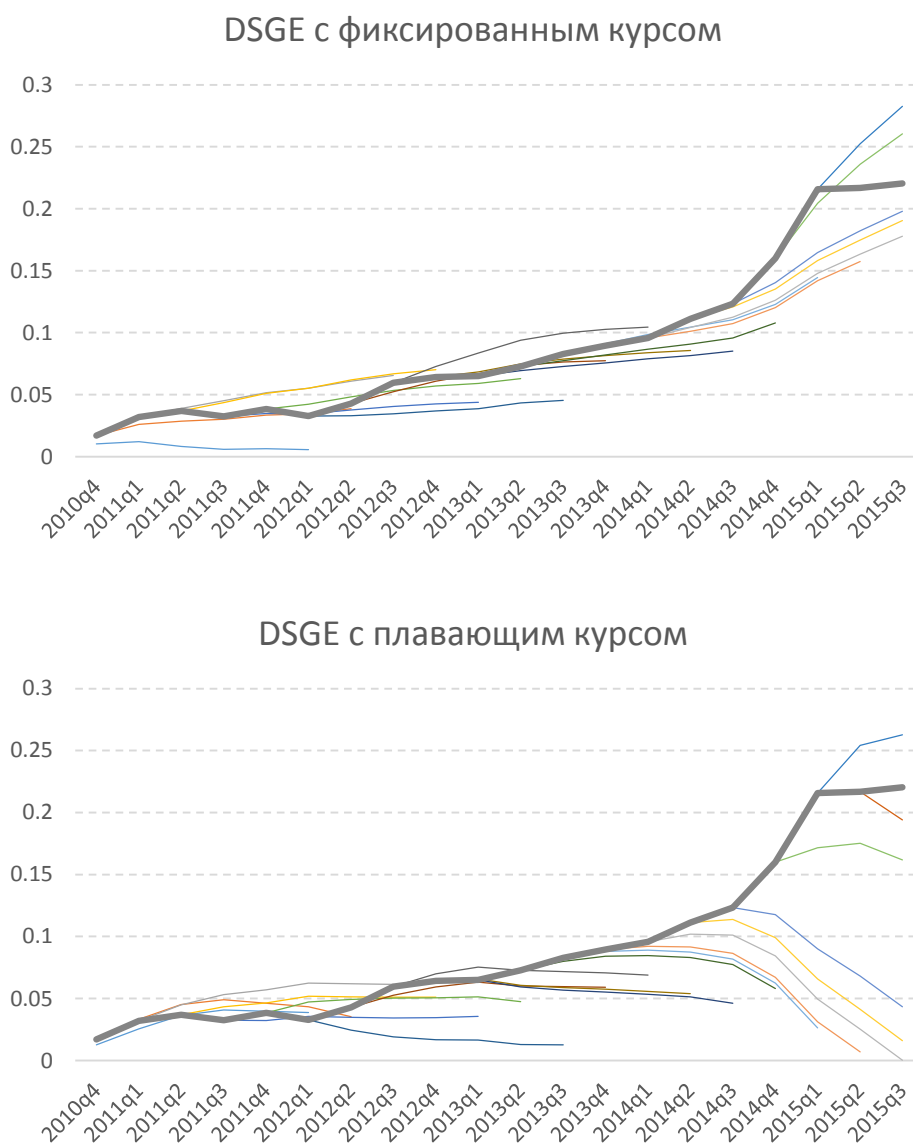
Рисунок 12. Прогнозные и реализовавшиеся траектории курса (логарифмическая шкала)

Альтернативная DSGE с плавающим курсом



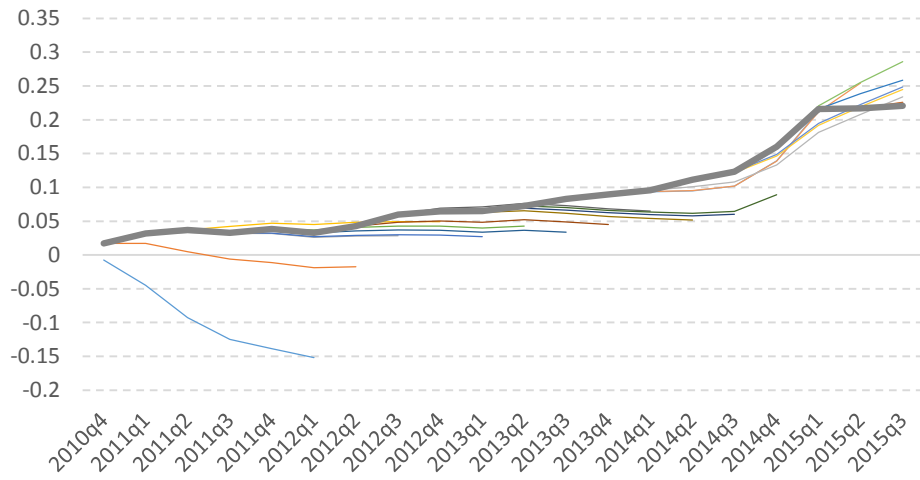
BVAR



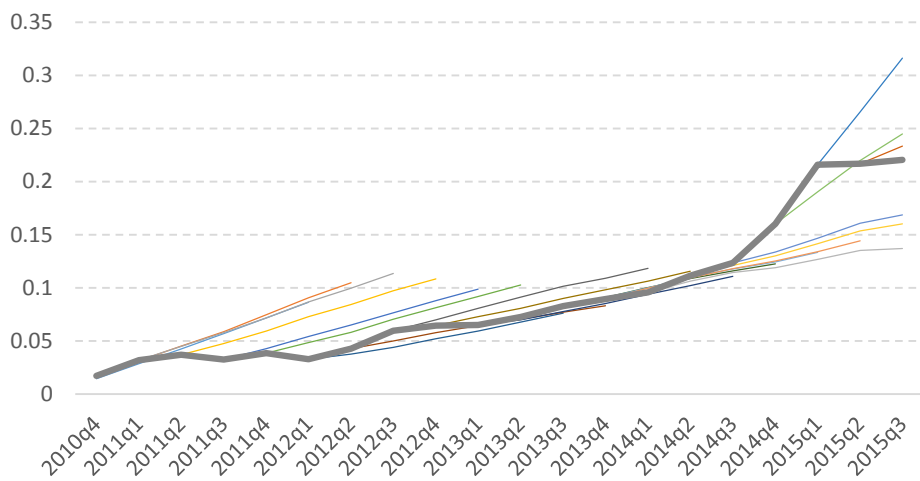
**Рисунок 13. Прогнозные и реализованные траектории ИПЦ²⁵
(логарифмическая шкала)**

²⁵ После корректировки на тренд и сезонность (см. ссылку 10).

Альтернативная DSGE с плавающим курсом



BVAR



Приложение Б

Мы будем искать решение системы уравнений

$$E_t f(y_{t+1}, y_t, x_t, x_{t-1}, A_t, A_{t-1}, \varepsilon_{t+1}, \varepsilon_t, e_{t+1}, e_t) = 0_{(n_y+n_x+n_A) \times 1}$$

$$A_t = A_{t-1} + e_t$$

в виде

$$y_t = g(x_{t-1}, A_t, \varepsilon_t, e_t), \quad (\text{B.1})$$

$$x_t = h(x_{t-1}, A_t, \varepsilon_t, e_t), \quad (\text{B.2}),$$

при этом мы неявно предполагаем непрерывность и дифференцируемость f , а также выполнение предположений 3.5 и 3.6 из *Lan and Meyer-Gohde (2014)* для каждого A_t в интересующей нас области. Для введения этих предположений переобозначим

$$\tilde{y}_t = \begin{bmatrix} y_{t+1} \\ x_{t+1} \\ A_{t+1} \end{bmatrix}, \quad y'_t = \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \\ A_t \end{bmatrix} \text{ и } z_t = \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \\ A_{t-1} \\ \varepsilon_t \\ e_t \end{bmatrix}.$$

Предположение 1 (Предположение 3.5 из *Lan and Meyer-Gohde (2014)*). Существуют $2n_y$ скрытых корней $f_{\tilde{y}}\lambda^2 + f_y\lambda + f_z z_{y'}$ – таких, что $n_y + \text{rank}(f_{\tilde{y}})$ – конечных $\lambda \in \mathbb{C}: \det(f_{\tilde{y}}\lambda^2 + f_y\lambda + f_z z_{y'}) = 0$ и $n_y - \text{rank}(f_{\tilde{y}})$ бесконечных λ , из которых n_y лежат внутри или на единичном круге и n_y – вне.

Предположение 2 (Предположение 3.6 из *Lan and Meyer-Gohde (2014)*). Существует матрица $X \in R^{n_y \times n_y}$, такая, что $f_{\tilde{y}}X^2 + f_yX + f_z z_{y'} = 0$ и $|\text{eig}(X)| \leq 1$.

Мы предполагаем существование и единственность аппроксимации первого порядка и проверяем это в каждой точке с помощью условий Бланшара–Кана. Тогда коэффициенты аппроксимации первого порядка для (B.1)–(B.2) около $(y_{ss}(A_t), x_{ss}(A_t))$ задаются следующими формулами:

$$f_1 * g_1 * h_1 + f_2 * g_1 + f_3 * h_1 + f_4 = 0_{(n_x+n_y) \times n_x},$$

$$f_1 * g_1 * h_3 + f_2 * g_3 + f_3 * h_3 + f_8 = 0_{(n_x+n_y) \times n_\varepsilon},$$

$$f_1 * g_1 * h_4 + f_2 * g_4 + f_3 * h_4 - f_6 + f_{10} = 0_{(n_x+n_y) \times n_e},$$

$$h_5 = 0_{n_x \times 1},$$

$$g_5 = 0_{n_y \times 1},$$

где l_i – производная функции l по аргументу i в точке A_t .

Доказательство. С учетом (B.1)–(B.2) система записывается следующим образом:

$$\int f(g(h(x_{t-1}, A_t, \varepsilon_t, e_t, \chi), A_t, \chi \varepsilon_{t+1}, \chi e_{t+1}, \chi), g(x_{t-1}, A_t, \varepsilon_t, e_t, \chi), h(x_{t-1}, A_t, \varepsilon_t, e_t, \chi), x_{t-1}, A_t, A_t - e_t, \chi \varepsilon_{t+1}, \varepsilon_t, \chi e_{t+1}, e_t) d(\varepsilon_{t+1}, e_{t+1}) = 0_{(n_y+n_x) \times 1}$$

Аппроксимация первого порядка:

$$\int (f_1 * g_1 * h_1 * x_{t-1} + f_1 * g_1 * h_3 * \varepsilon_t + f_1 * g_1 * h_4 * e_t + f_1 * g_1 * h_5 * \chi + f_1 * g_3 * \chi * \varepsilon_{t+1} + f_1 * g_4 * \chi * e_{t+1} + f_1 * g_5 * \chi + f_2 * g_1 * x_{t-1} + f_2 * g_3 * \varepsilon_t + f_2 * g_4 * e_t + f_2 * g_5 * \chi + f_3 * h_1 * x_{t-1} + f_3 * h_3 * \varepsilon_t + f_3 * h_4 * e_t + f_3 * h_5 * \chi + f_4 * x_{t-1} - f_6 * e_t + f_7 * \chi * \varepsilon_{t+1} + f_8 * \varepsilon_t + f_9 * \chi * e_{t+1} + f_{10} * e_t) d(\varepsilon_{t+1}, e_{t+1}) = 0_{(n_y+n_x) \times 1}$$

Используя тот факт, что $E_t \varepsilon_{t+1} = 0$ и $E_t e_{t+1} = 0$

$$x_{t-1}: f_1 * g_1 * h_1 + f_2 * g_1 + f_3 * h_1 + f_4 = 0_{(n_x+n_y) \times n_x}$$

$$\varepsilon_t: f_1 * g_1 * h_3 + f_2 * g_3 + f_3 * h_3 + f_8 = 0_{(n_x+n_y) \times n_\varepsilon}$$

$$e_t: f_1 * g_1 * h_4 + f_2 * g_4 + f_3 * h_4 - f_6 + f_{10} = 0_{(n_x+n_y) \times n_e}$$

$$\chi: f_1 * g_1 * h_5 + f_1 * g_5 + f_2 * g_5 + f_3 * h_5 = 0_{(n_x+n_y) \times 1}$$

Конец доказательства.

С учетом изменения тренда эволюция циклической части (отклонение от тренда) может быть записана следующим образом:

$$y_t^c = g_1(A_t) * x_{t-1}^c + g_3(A_t) * \varepsilon_t + (g_4(A_t) - g_1(A_t) * x_1^{SS}(A_t)) * e_t \quad (\text{B.5})$$

$$x_t^c = h_1(A_t) * x_{t-1}^c + h_3(A_t) * \varepsilon_t + (h_4(A_t) - h_1(A_t) * x_1^{SS}(A_t)) * e_t \quad (\text{B.6}).$$

Аппроксимация в отдельной точке предполагает установление коэффициентов константами и является частным случаем системы В.5–В.6.

Приложение В

Для стационарных состояний имеем следующую систему уравнений:

$$1 = \beta * \frac{R}{\pi} * \exp^{-g}$$

$$R = R^* * rp(b^*, p^{oil,T}, 0) * g^\varepsilon$$

$$w = c * A_L * (l)^\phi * (1 - h * \exp^{-g})$$

$$y = l$$

$$\left(1 - \frac{1}{v_H}\right) + \frac{1}{v_H} \frac{w}{p^H} = 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{v_F}\right) + \frac{1}{v_F} \frac{rer}{p^F} = 0$$

$$c = A^* * y^\gamma * im^{1-\gamma}$$

$$p^H * y = \gamma * c$$

$$p^F * im = (1 - \gamma) * c$$

$$\left(R^* * rp(b^*, p^{oil,T}, 0)\right)^{-1} * b^* = b^* * \frac{\exp^{-g}}{\pi} * g^\varepsilon + p^{oil,T} * rer * x - rer * im - rer * dRes$$

$$\pi = \pi_*$$

$$dRes = 0$$

$$g_t^\varepsilon = \frac{\pi}{\pi^*}$$

$$\pi^H = \pi$$

$$\pi^F = \pi$$

Приложение Г

В настоящем приложении рассматривается условный пример использования DSGE-модели для сравнения различных вариантов денежно-кредитной политики при заданных сценарных условиях.

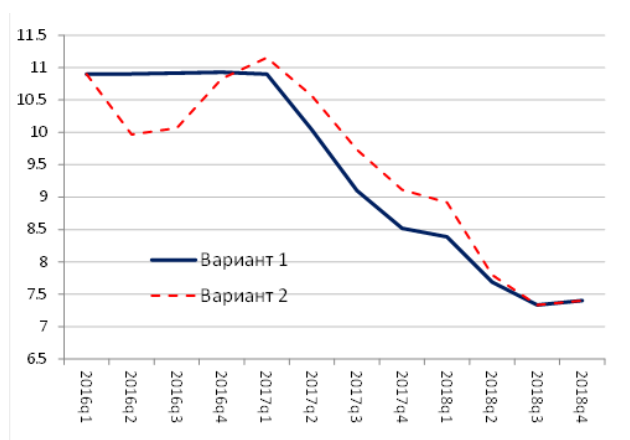
Представленные результаты расчетов по DSGE-модели основаны на средней цене нефти Urals в 2016 и 2017 годах на уровне 31 и 35 долл./барр. соответственно. Исходя из такой динамики цен на нефть с помощью DSGE-модели можно рассмотреть два варианта динамики ключевой ставки в 2016–2017 годах, обеспечивающей достижение целевого уровня инфляции 4% к концу 2017 года:

Вариант I. Сохранение ключевой ставки на текущем уровне в течение продолжительного времени с переходом к планомерному снижению ставки после выхода инфляции на траекторию, выводящую на 4% к концу 2017 года.

Вариант II. Снижение ключевой ставки в ближайшее время и определение траектории ее дальнейшего движения, которая также позволит достичь цели по инфляции к концу 2017 года.

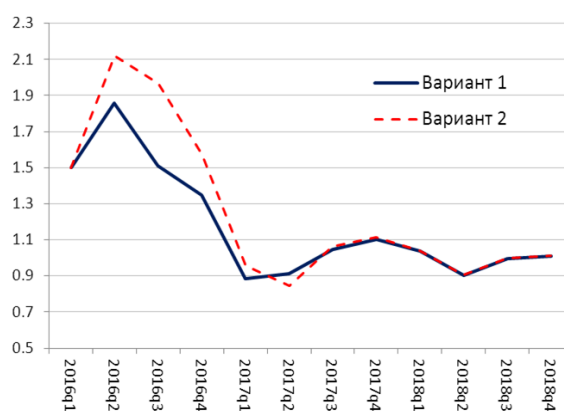
Результаты расчетов показывают, что снижение ключевой процентной ставки до уровня 10% годовых в ближайшее время не позволит существенно снизить инфляцию в 2016 году. Инфляция по итогам 2016 года в *варианте II* оказывается выше, чем в *варианте I*, когда Банк России оставляет ключевую ставку на неизменном уровне (Рисунок Д2). Следует отметить, что во втором варианте экономика в 2016 году временно выходит на более высокую траекторию роста ВВП (рисунок Д4).

Рисунок Д1. Краткосрочная ставка МБК, % годовых

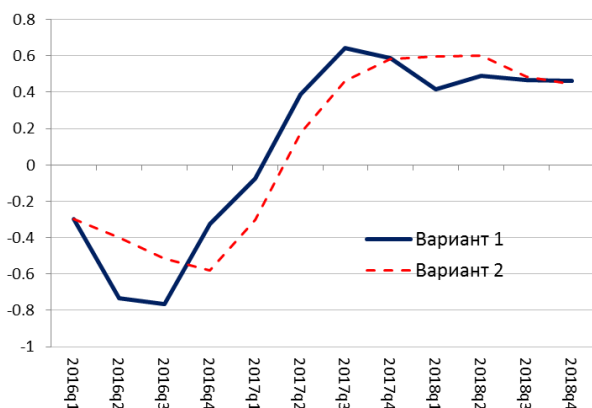


Источник: Росстат.

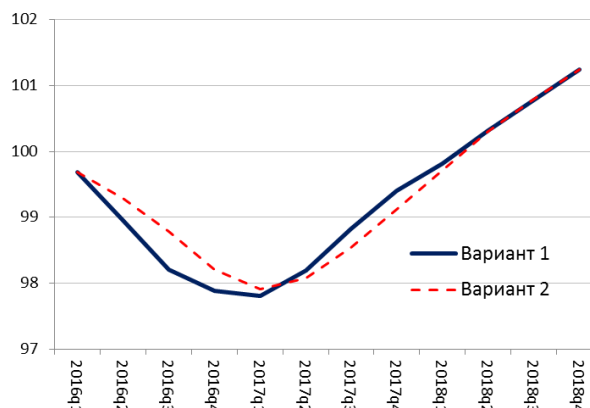
Рисунок Д2. Инфляция, %, YoY



Источник: Росстат.

**Рисунок Д3. Прирост ВВП, %, QoQ
(с устраненной сезонностью)**

Источник: Росстат, расчеты ДИП.

Рисунок Д4. Индекс ВВП

Источник: Росстат, расчеты ДИП.

Согласно расчетам, в *варианте II* для достижения цели по инфляции Банк России вынужден будет значительно поднять ключевую ставку в четвертом квартале 2016 года. При этом возобновление цикла понижения ставок, согласованное с достижением целевого уровня инфляции, становится возможным только во втором квартале 2017 года (Рисунок Д1). В результате в *варианте II* ключевая ставка в 2017 году находится на более высоком уровне, чем в *варианте I*, а экономика оказывается на более низкой траектории роста (рисунки Д3 и Д4).

Последнее объясняется тем, что понижение ключевой ставки в *варианте II* (с целью стимулирования роста или вследствие недооценки инфляционных рисков) оказывается кратковременным и преждевременным и ее снижение приводит к необходимости последующего повышения ставок. В *варианте I* сдерживающий эффект на экономику от более высоких ставок в первом полугодии 2016 года (по сравнению с *вариантом II*) компенсируется стимулирующим эффектом в следующем году в результате активного поступательного снижения ключевой ставки, приводящего к более низким процентным ставкам в экономике 2017 году.

Необходимо учитывать, что спецификация используемой нами в расчетах в данном приложении модели общего равновесия имеет стилизованный характер²⁶, поэтому результаты представленных выше модельных расчетов нельзя однозначно интерпретировать как рекомендацию Банку России не изменять ключевую ставку. Результаты расчетов по DSGE-модели должны рассматриваться в комплексе с

²⁶ Схема модели приведена на рисунке Д5.

результатами расчетов по другим моделям и углубленного анализа текущей экономической ситуации и баланса рисков.

По результатам расчетов можно сделать два основных вывода. Во-первых, при снижении нефтяных цен или проявлении отложенных последствий уже произошедшего снижения временное сохранение жесткой денежно-кредитной политики позволяет предотвратить новый виток инфляционного давления. Во-вторых, преждевременное снижение ключевой ставки чревато большими издержками для экономики, чем удержание ставки без изменения в течение продолжительного времени.

Рисунок Д5. Схема модели, используемой в Приложении Д

