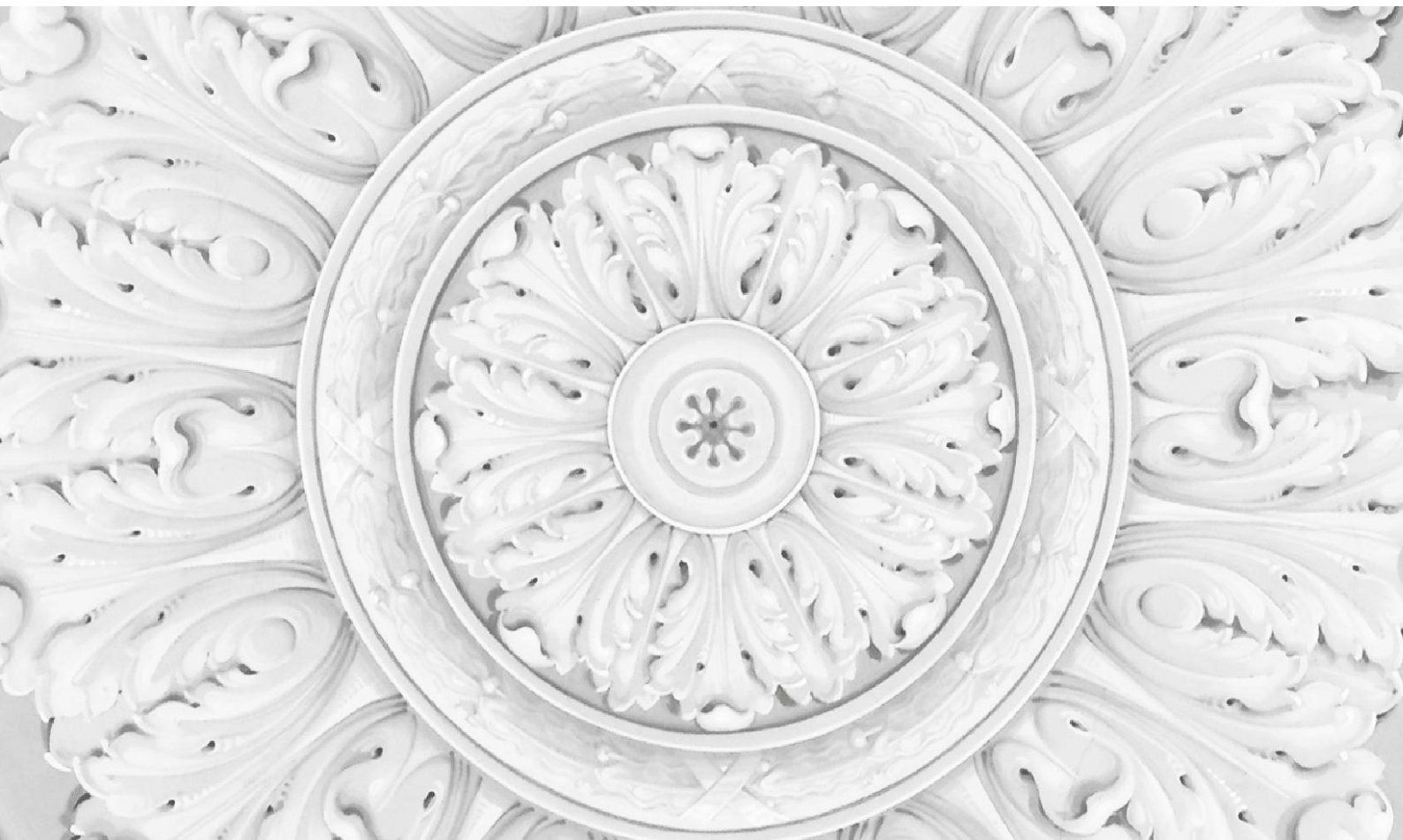




**Банк России**

Центральный банк Российской Федерации



**СЕРИЯ ДОКЛАДОВ  
ОБ ЭКОНОМИЧЕСКИХ  
ИССЛЕДОВАНИЯХ**

Игорь Рапохин

Модель извлечения ожиданий  
относительно будущих  
краткосрочных процентных  
ставок из доходности ОФЗ

№ 11 / Май 2016 г.

**Игорь Рапохин**

Email: rapokhinim@cbr.ru

Автор выражает благодарность Е.Г. Мельниковой за полезные комментарии и замечания. Все ошибки, которые могут содержаться в данной работе, являются сферой ответственности автора.

© Банк России, 2016

**Адрес** ул. Неглинная, 12, Москва, 107016  
**Телефоны** +7 495 771-91-00, +7 495 621-64-65 (факс)  
**Сайт** [www.cbr.ru](http://www.cbr.ru)

Все права защищены. Содержание настоящего доклада выражает личную позицию автора и может не совпадать с официальной позицией Банка России. Банк России не несет ответственности за содержание доклада. Любое воспроизведение представленных материалов допускается только с разрешения автора.

## Резюме

В докладе представлен подход к извлечению ожиданий участников российского рынка государственных ценных бумаг в отношении будущей динамики краткосрочных ставок ОФЗ (сроком 1 год) из кривой доходности. Построена четырехфакторная Гауссова аффинная модель срочной структуры процентных ставок, отдельные параметры которой были модифицированы с учетом российской специфики. Посредством модели осуществлена декомпозиция доходности ОФЗ на компоненты ожиданий и временной премии за риск. Модельные оценки используются в Банке России при анализе ситуации и ожиданий на внутреннем долговом рынке.

**Ключевые слова:** кривая доходности, извлечение ожиданий, временная премия за риск.

**JEL-классификация:** E43, G12.

**Оглавление**

<b>1. Теория вопроса.....</b>	<b>5</b>
<b>2. Метод оценивания .....</b>	<b>6</b>
<b>3. Спецификация модели для рынка ОФЗ .....</b>	<b>7</b>
<b>4. Результаты тестирования модели .....</b>	<b>12</b>
<b>5. Основные выводы .....</b>	<b>14</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>16</b>
<b>Приложение 1 .....</b>	<b>17</b>

## 1. Теория вопроса

Проводя денежно-кредитную политику, центральные банки прямо или косвенно воздействуют на ценообразование на финансовом рынке. Цены финансовых активов отражают ожидания участников рынка относительно перспектив развития экономики и будущей динамики краткосрочных процентных ставок. Эти ожидания, в свою очередь, учитываются центральными банками при принятии решений в области денежно-кредитной политики.

Большинство современных подходов к извлечению ожиданий из доходности облигаций построено на гипотезе чистых ожиданий (pure expectations hypothesis). Согласно данной гипотезе доходность облигации с длинным сроком до погашения равна усредненным ожидаемым показателям доходности краткосрочных облигаций, суммарный срок до погашения которых равен сроку до погашения долгосрочной облигации:

$$f_t^{(n)} = ny_t^{(n)} - (n-1)y_t^{(n-1)} = E_t(y_{t+n-1}^1),$$

где

$f_t^{(n)}$  – логарифм  $n$ -летней форвардной доходности в момент  $t$ ,

$y_t^{(n)}$  – логарифм доходности облигации со сроком до погашения  $n$ ,

$E_t$  – оператор ожидания.

Гипотеза чистых ожиданий дает интуитивно понятное теоретическое объяснение срочной структуры доходности, но игнорирует ее важный компонент – временную премию за риск (далее – премия за риск), полагая эту премию равной нулю и не зависящей от срока до погашения облигации. Она основана на риск-нейтральном подходе, предполагающем существование полного рынка, на котором отсутствует арбитраж, форвардные ставки определены через спот-ставки и совпадают с ожидаемыми, а цена любого актива равна ожидаемому генерируемому им денежному потоку, продисконтированному по безрисковой ставке.

На практике же номинальная доходность долгосрочной облигации предполагает значительный уровень неопределенности, связанной с конъюнктурными факторами и инвестиционными предпочтениями экономических агентов. Поэтому инвесторы включают в нее, помимо ожидаемой доходности краткосрочных облигаций, дополнительную премию за риск.

$$f_t^{(n)} = E_t(y_{t+n-1}^1) + tp_t^{(n)},$$

где  $tp_t^{(n)}$  – премия за риск по облигации со сроком до погашения  $n$ .

Таким образом, данная гипотеза несколько искажает оценку ожиданий, извлекаемых из доходности облигаций, за что она не раз подвергалась критике. В ряде исследований приводятся доказательства нереалистичности ее предпосылки о нулевой премии за риск [Macaulay, 1938; Fama and Bliss, 1987; Stillwagon, 2015, Дробышевский и др., 2009]. На практике для оценки ожиданий осуществляется переход от риск-нейтральной к реальной или физической вероятностной мере. Это, как правило, осуществляется путем вычисления премии за риск исходя из избыточного дохода по облигации.

## 2. Метод оценивания

В современной экономической теории наиболее популярным способом оценивания ожидаемой доходности и премии за риск являются аффинные модели срочной структуры процентных ставок<sup>1</sup>. Банк России для извлечения информации о будущих ставках также использует модель этого класса, модифицированную с учетом российской специфики.

Основываясь на принципе отсутствия арбитража, аффинные модели представляют набор процентных ставок разной срочности в каждый момент времени в виде не зависящей от времени линейной (аффинной) функции небольшого числа факторных переменных.

Для форвардной доходности<sup>2</sup> любых облигаций выполняется равенство:

$$f_t^{(n)} = a + b'X_t,$$

где  $X_t$  – вектор факторных переменных.

Факторные переменные ( $X_t$ ) в модели Банка России являются ненаблюдаемыми и описывают избыточный доход по облигации, а также уровень, наклон и кривизну кривой доходности<sup>3</sup>. В большей части зарубежных работ динамика факторных

<sup>1</sup> Наиболее общее описание подобных моделей представлено в статье [Duffie and Kan, 1996].

<sup>2</sup> Здесь и далее под форвардной доходностью будет иметься в виду  $n$ -летняя форвардная доходность на 1 год. Зависимость между форвардной доходностью и доходностью к погашению бескупонных облигаций определяется следующим образом:

$$f_t^{(n)} = ny_t^{(n)} - (n-1)y_t^{(n-1)}, \text{ где}$$

$f_t^{(n)}$  – логарифм  $n$ -летней форвардной доходности (на один год) в момент  $t$ ,

$y_t^{(n)}$  – логарифм доходности к погашению бескупонной облигации со сроком до погашения  $n$  в момент  $t$ .

<sup>3</sup> Аналогичный метод извлечения ожиданий с применением ненаблюдаемых факторных переменных описан в ряде зарубежных работ [Cochrane and Piazzesi, 2009; Kim and Wright, 2005]. Весьма популярны также модели, в которые дополнительно включаются наблюдаемые макроэкономические и финансовые переменные [Ang and Piazzesi, 2003; Rudebusch, Swanson and Wu, 2008]. Их использование позволяет в ряде случаев повысить результативность прогнозов срочной структуры процентных ставок [De Pooter, Ravazzolo

переменных в аффинных моделях задается гауссовым VAR(p)-процессом [*Chen and Scott, 1993; Dai and Singleton, 2000*]:

$$X_{t+1} = \mu + \phi X_t + v_{t+1}, V = E(v_{t+1}v_{t+1}'),$$

с нормально распределенными шоками.

Важнейшую роль в декомпозиции кривой доходности играет спецификация ядра ценообразования (стохастического дисконтирующего фактора)<sup>4</sup>, позволяющая оценить ожидания и премию за риск. В зарубежной литературе [*Constantinides, 1992; Liu, 1999; Cochrane and Piazzesi, 2009* и др.] наиболее распространена следующая спецификация:

$$M_{t+1} = \exp\left(-\delta_0 - \delta_1' X_t - \frac{1}{2} \lambda_t' V \lambda_t - \lambda_t' v_{t+1}\right),$$

$$\lambda_t = \lambda_0 + \lambda_1 X_t,$$

где  $\lambda_0, \lambda_1$  – параметры рыночных цен риска<sup>5</sup>.

### 3. Спецификация модели для рынка ОФЗ

Сначала оценим целесообразность построения для рынка ОФЗ модели, учитывающей варьирующуюся во времени премию за риск. Проверим гипотезу о том, что премия за риск не равна нулю, стандартным образом – путем оценки коэффициентов регрессии [*Fama, 1984*]:

$$y_{t+n}^1 - y_t^1 = a + b(f_t^n - y_t^1) + e_{t+n},$$

где  $a, b$  – оцениваемые коэффициенты регрессии,

$e_{t+n}$  – остатки регрессии.

При тестировании были использованы данные о среднемесячной бескупонной доходности ОФЗ за период с января 2003 по март 2016 года. Полученные результаты отражены в следующей таблице (таблица 1).

---

*and van Dijk, 2010*]. В то же время их существенным недостатком является меньшая точность в описании кривой доходности и большая вычислительная сложность [*Cochrane and Piazzesi, 2009*].

<sup>4</sup> Ядро ценообразования равно случайной величине  $m$ , удовлетворяющей

$E(mx) = p$ , где

$E()$  – оператор ожидания,

$p$  – цена актива,

$x$  – сумма выплаты/денежных потоков по активу.

<sup>5</sup> Эти параметры определяют варьирующуюся во времени компенсацию за неопределенность, включаемую инвесторами в цены облигаций.

Таблица 1

Срок до погашения облигации, лет	a	b	R <sup>2</sup>
2	<b>2,29</b>	<b>-1,28</b>	0,22
	0,37	0,20	
3	<b>1,36</b>	<b>-0,28</b>	0,02
	0,44	0,17	
4	<b>0,02</b>	<b>0,51</b>	0,12
	0,33	0,13	
5	<b>-2,40</b>	<b>1,54</b>	0,46
	0,43	0,16	
6	<b>-3,35</b>	<b>1,86</b>	0,55
	0,47	0,17	
7	<b>1,08</b>	<b>0,02</b>	0,00
	0,30	0,12	
8	<b>1,21</b>	<b>-0,05</b>	0,00
	0,58	0,23	
9	<b>2,93</b>	<b>-0,42</b>	0,04
	0,76	0,28	
10	<b>3,53</b>	<b>-0,40</b>	0,03
	0,89	0,30	

Поскольку коэффициент  $b$  в большинстве регрессий для доходности ОФЗ разной срочности значительно отличается от единицы, гипотеза о постоянной премии за риск (в том числе нулевой) для рынка ОФЗ отвергается. В связи с этим в модели делаем допущение о том, что премия за риск не равна нулю и варьируется во времени.

Расчет ожиданий и премии за риск проводим в несколько этапов.

### 1) Формируем факторные переменные состояний (state variables).

Для этого определяем факторы, описывающие закладываемую в кривую доходности премию за риск и структуру форвардных ставок в каждый момент времени. Всего таких факторов четыре: первый прогнозирует избыточный доход по облигациям, а три остальных описывают форму кривой доходности: уровень ( $level_t$ ), наклон ( $slope_t$ ) и кривизну ( $curve_t$ ):

$$X_t = [x_t \text{ level}_t \text{ slope}_t \text{ curve}_t].$$

Для реконструкции фактора  $x_t$ , прогнозирующего избыточный доход, строим регрессию вида:

$$r x_{t+1} = \alpha + \beta \tilde{f}_t + \varepsilon_{t+1},$$

где  $r x_{t+1}$  – избыточный доход,



$$\tilde{f}_t^n = f_t^n - y_t^1, n = 1, 2, \dots, 5.$$

Далее производим факторную декомпозицию ожидаемого избыточного дохода по собственным значениям (ковариационной матрицы ожидаемого избыточного дохода):

$$Q_r \Lambda Q_r' = cov[E_t(rx_{t+1})].$$

В таблице 2 представлены доли дисперсии четырех выделенных факторов из матрицы  $Q_r$  в суммарной дисперсии, объясненной регрессией.

Таблица 2

Фактор	Доля объясненной дисперсии, %
1	99,43
2	0,45
3	0,10
4	0,02

Поскольку в разложении ковариационной матрицы избыточного дохода доминирует первый фактор, доля которого в суммарной объясненной дисперсии составляет более 99%, можно утверждать, что избыточный доход объясняется единственным фактором  $x_t$ :

$$E_t(q_r' r x_{t+1}) = q_r' \alpha + q_r' \beta \tilde{f}_t = x_t,$$

где  $q_r'$  – столбец матрицы  $Q_r$ , соответствующий максимальному собственному значению матрицы ковариаций.

Оставшиеся факторы формируются с помощью декомпозиции ковариационной матрицы форвардных ставок после ортогонализации по отношению к  $x_t$ . Для их получения сначала оцениваем регрессию:

$$f_t = c + dx_t + e_t.$$

На следующем шаге производим декомпозицию ковариационной матрицы остатков:

$$Q \Lambda Q' = cov(e_t),$$

затем формируем три оставшихся фактора:

$$level_t = Q(:, 1)'(c + e_t)$$

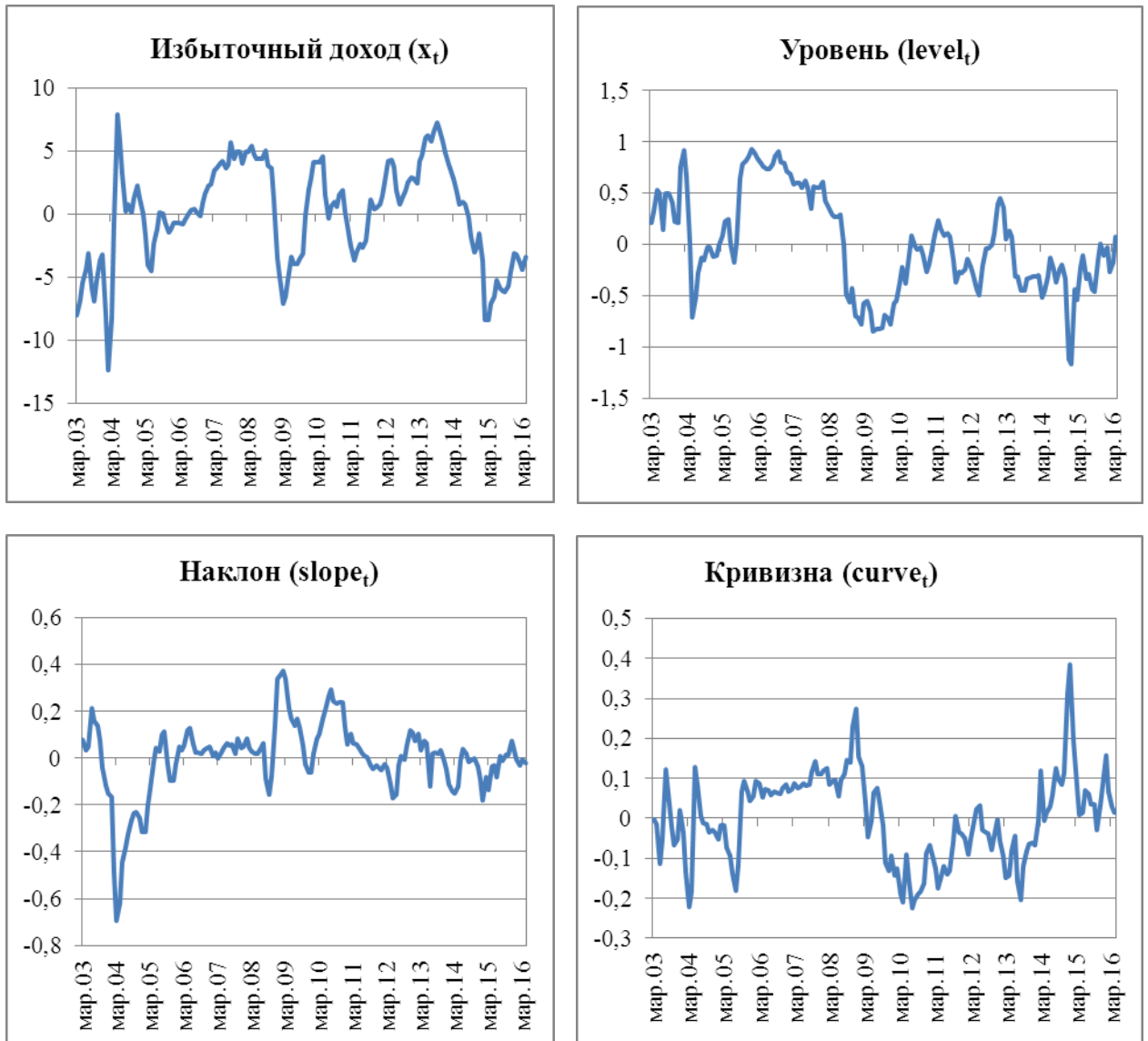
$$slope_t = Q(:, 2)'(c + e_t)$$

$$curve_t = Q(:, 3)'(c + e_t),$$

где  $Q(:, i)$  –  $i$ -ый столбец матрицы собственных векторов.

На рисунках 1–4 представлена динамика полученных факторных переменных.

**Рисунки 1–4**



## 2) Оценим параметры VAR (1)-процесса для полученных факторных переменных.

С помощью метода наименьших квадратов оценим параметры векторной авторегрессии:

$$X_{t+1} = \mu + \phi X_t + v_{t+1}.$$

Одновременно строим матрицу шоков  $V$ , которая будет использоваться ниже для оценки премий за риск:

$$V = E(v_{t+1}v_{t+1}'), v_{t+1} \sim IID N(0,1).$$

Соответствующие декомпозиции импульсные отклики переменных, входящих в вектор  $X_t$ , представлены в приложении 1.

### 3) Опишем динамику цен и доходности ОФЗ, проведем декомпозицию кривой доходности на компоненты ожиданий и премии за риск

Зависимость между ценами облигаций и факторными переменными с учетом описанной выше спецификации дисконтирующего фактора определим следующим образом:

$$p_t^{(n)} = A_n + B_n' X_t,$$

где

$$A_{n+1} = -\partial_0 + A_n + B_n' \mu^* + \frac{1}{2} B_{n-1}' V B_{n-1},$$

$$B_{n+1}' = -\partial_1' + B_n' \phi^*, \text{ при этом}$$

$$A_0 = 0, B_0 = 0,$$

$$\phi^* = \phi - V \lambda_1, \mu^* = \mu - V \lambda_0.$$

Из представленных соотношений следует, что динамика форвардных ставок может быть описана следующим образом:

$$f_t^{(n)} = A_n^f + B_n^f X_t,$$

где

$$A_n^f = \partial_0 - B_{n-1}' \mu^* - \frac{1}{2} B_{n-1}' V B_{n-1},$$

$$B_n^f = \partial_1' \phi^{*n-1}.$$

Неизвестные параметры  $\partial_0, \partial_1, \mu^*, \phi^*$  находим посредством минимизации квадрата разности между фактически наблюдавшимися форвардными доходностями и их модельными оценками:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{t=1}^T (A_n^f + B_n^f X_t - f_t^{(n)})^2.$$

Критерием подбора параметров рыночных цен риска  $\lambda_0, \lambda_1$  служит точность ретроспективного прогноза избыточного дохода:

$$r_{t+1}^{(n)} = B'_{n-1} V \lambda_0 - \frac{1}{2} B'_{n-1} V B_{n-1} + B'_{n-1} V \lambda_1 X_t.$$

*При этом подбор указанных параметров проведем особым образом с учетом специфики рынка ОФЗ.* При расчете не будем делать упрощающего предположения о том, что премия за риск зависит от изменения лишь одного из четырех факторов, поскольку эта гипотеза для рынка ОФЗ не подтвердилась<sup>6</sup>.

После нахождения всех необходимых параметров осуществим декомпозицию кривой доходности ОФЗ на ожидаемую доходность и премию за риск:

$$E_t y_{t+n-1}^{(1)} = \delta_0 + \delta'_1 ((1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^{n-1}) \mu + \phi^{n-1} X_t)$$

$$tp_t^{(n)} = f_t^{(n)} - E_t y_{t+n-1}^{(1)}.$$

Протестируем представленный выше подход к извлечению ожиданий на фактических данных о динамике доходности ОФЗ.

#### 4. Результаты тестирования модели

Модельные оценки показали, что в течение 2015–2016 годов среди участников рынка ОФЗ преобладали ожидания снижения процентных ставок и доходности (рисунки 5–7), однако начиная с июня 2015 года оценки масштабов этого снижения существенно варьировались в зависимости от изменения внешнеэкономической конъюнктуры, динамики курса рубля, текущей инфляции и инфляционных ожиданий, а также от решений Банка России по ключевой ставке.

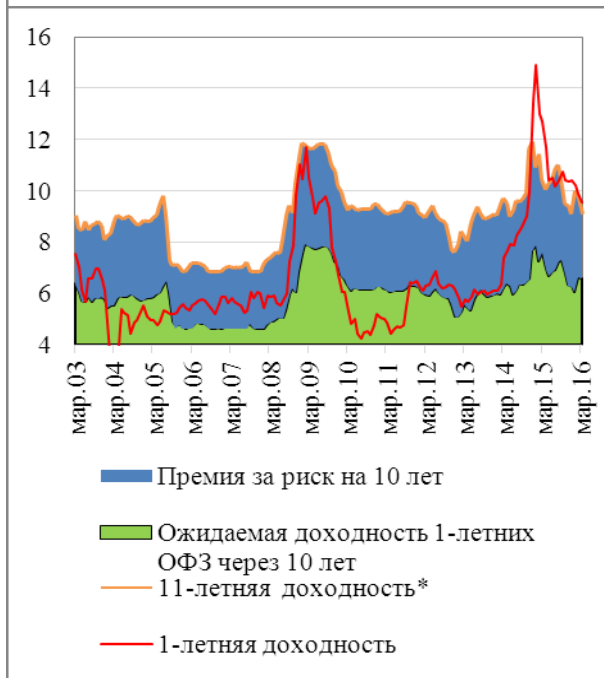
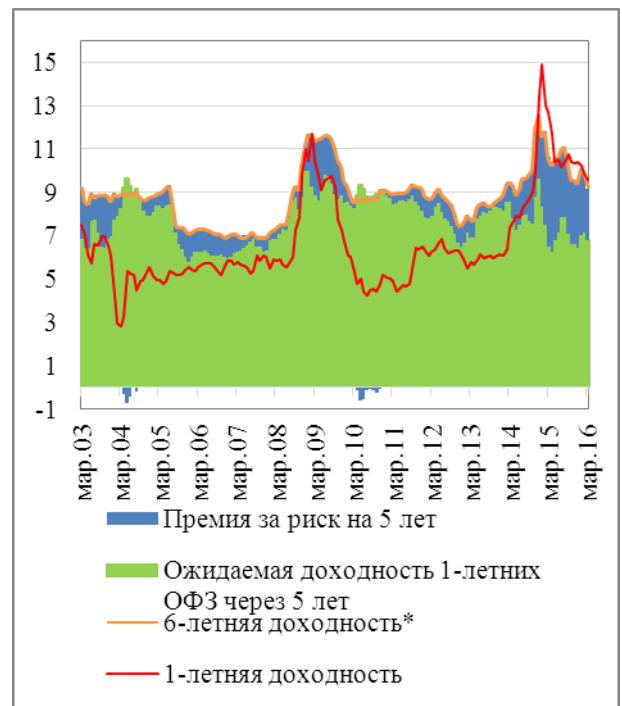
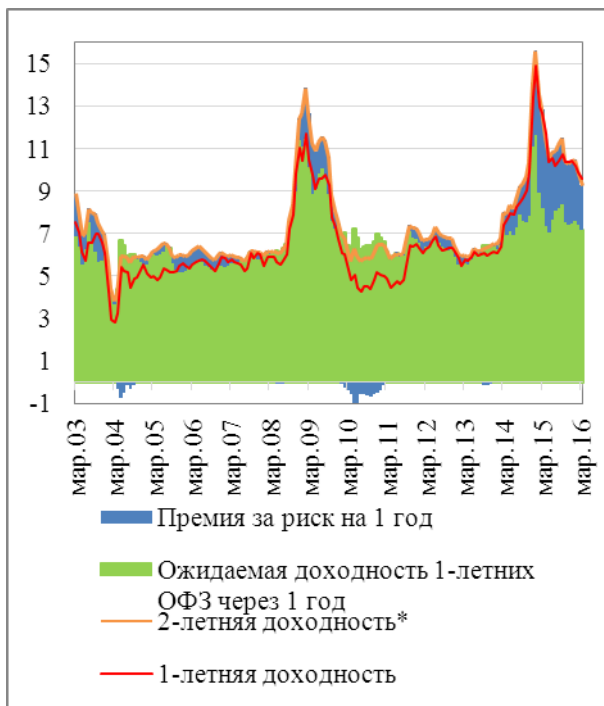
Например, в августе–сентябре 2015 года оценки ожидаемой доходности краткосрочных ОФЗ смещались вверх, отражая возросшие внешне- и внутриэкономические риски (в том числе инфляционные) и мнение участников рынка о постепенном исчерпании потенциала снижения ключевой ставки Банка России. Это совпало с окончанием периода поэтапного смягчения регулятором денежно-кредитной политики: с 31 июля 2015 года по настоящее время (26 апреля 2016 года) Банк России сохраняет ключевую ставку неизменной. В дальнейшем неоднократно наблюдались периоды улучшения настроений на внутреннем рынке, когда ожидания будущих ставок начинали снижаться более интенсивно. Однако снижавшаяся следом за ними премия за риск оставалась относительно высокой – выше среднего уровня за 2003–2014 годы. Это свидетельствует о том, что неопределенность ценовых ожиданий участников рынка ОФЗ оставалась на повышенном уровне из-за сохраняющихся значительных инфляционных рисков.

<sup>6</sup> Такое упрощающее предположение сделано, например, в модели [Cochrane and Piazzesi, 2009].

После принятого 18 марта 2016 года Банком России решения оставить ключевую ставку без изменений и дать более жесткий сигнал рынку в отношении сроков проведения умеренно жесткой денежно-кредитной политики оценки ожидаемых ставок и доходности стали постепенно повышаться. За период с момента принятия данного решения по третью декаду апреля ожидаемые масштабы снижения ставок уменьшились на 20–40 б.п., доходность ОФЗ повысилась на 25 б.п.

Рисунки 5–7

## Декомпозиция доходности ОФЗ, % годовых



\*Форвардная.

## 5. Основные выводы

Полученные Банком России результаты свидетельствуют о релевантности используемой аффинной модели срочной структуры процентных ставок.

Во-первых, модель обладает высокой точностью в описании динамики форвардных ставок (рисунки 8–10).

Рисунки 8–10

### Фактическая и оцененная динамика форвардных ставок, % годовых



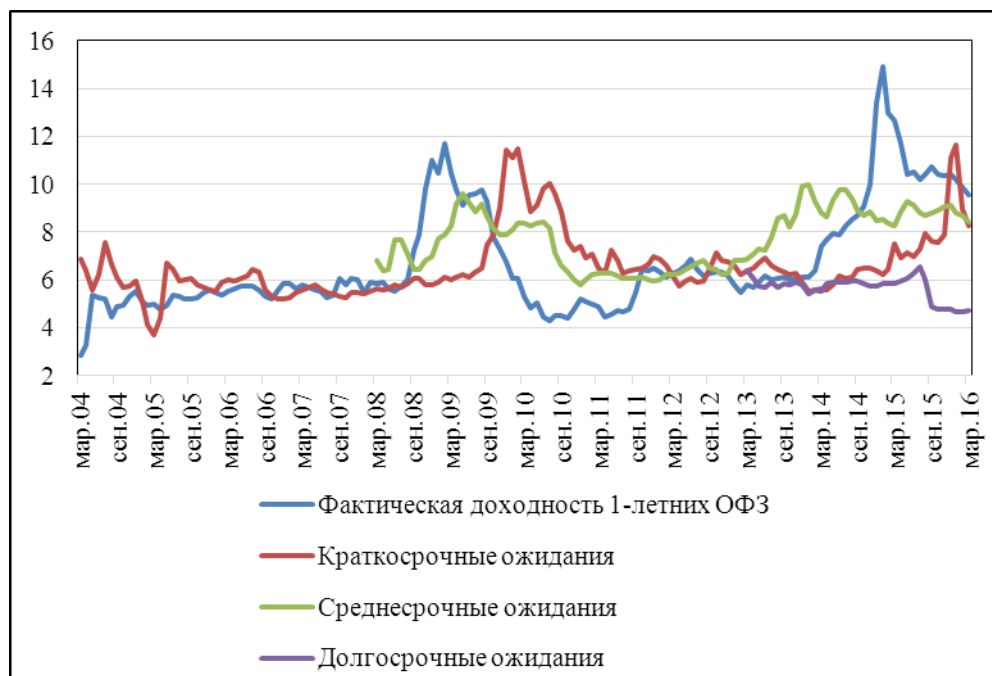
Во-вторых, оценки ожиданий и премий за риск, извлеченные из кривой доходности ОФЗ, в целом адекватно отражают изменение текущих условий в экономике и на финансовом рынке, а также импульсы денежно-кредитной политики Банка России, транслируемые рынку государственных ценных бумаг. В ответ на действие указанных

факторов их оценки меняют траекторию и величину. В периоды повышения инфляционных рисков, ухудшения конъюнктуры рынка и ужесточения денежно-кредитной политики происходит пересмотр ожиданий и премий за риск в сторону повышения, и наоборот.

Вместе с тем представленная модель хорошо предсказывает будущую динамику доходности ОФЗ в спокойные периоды и заметно хуже – в периоды дестабилизации и кризиса на финансовом рынке (рисунок 11). Это объясняется тем, что участники рынка зачастую недооценивают вероятные угрозы существенной дестабилизации рыночной конъюнктуры и периодически ошибаются в своих прогнозах.

Рисунок 11

### Динамика фактической и ожидавшейся доходности 1-летних ОФЗ,% годовых\*



\* Кратко-, средне- и долгосрочные ожидания являются оценками ожидавшейся за 1 год, 5 и 10 лет до соответствующей даты 1-летней доходности.

Поэтому поиск оптимального метода извлечения ожиданий из доходности облигаций продолжается. В качестве инструментария для дальнейших исследований рассматриваются альтернативные аффинные модели срочной структуры процентных ставок с добавлением российских макроэкономических и финансовых переменных, модели с другими спецификациями дисконтирующего фактора.

### Список литературы

1. Ang A., Piazzesi M. (2003). A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables. // *Journal of Monetary Economics* 50, 745–787.
2. Chen R.R., Scott L. (1993). Maximum likelihood estimation for a multifactor equilibrium model of the term structure of interest rates. // *Journal of Fixed Income* 3, 14–31.
3. Cochrane J., Piazzesi M. (2009). Decomposing the yield curve. // AFA 2010 Atlanta Meetings Paper.
4. Constantinides, G.M. (1992). A theory of the nominal term structure of interest rates. // *Review of Financial Studies* 5, 531–552.
5. Dai Q., Singleton K.J. (2000). Specification analysis of affine term structure models. // *Journal of Finance* 55, 1943–1978.
6. Duffie D., Kan R. (1996). A yield factor model of interest rates. // *Mathematical Finance* 6, 379–406.
7. Fama E. (1984). The Information in the Term Structure. // *Journal of Financial Economics* 13, 509–528.
8. Fama E., Bliss R. (1987). The information in long maturity forward rates. // *American Economic Review* 77, 680–692.
9. Kim D.H., Wright J.H. (2005). An arbitrage-free three-factor term structure model and the recent behavior of long-term yields and distant-horizon forward rates. // *Finance and Economics Discussion Series 2005-33*. Board of Governors of the Federal Reserve System.
10. Liu J. (1999). Portfolio selection in stochastic environments. // Working paper, UCLA, Los Angeles, CA.
11. Macaulay R. (1938). Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856. // NBER books.
12. de Pooter M., Ravazzolo F., van Dijk D. (2010) Term Structure Forecasting Using Macro Factors and Forecast Combination. // *International Finance Discussion Papers 993*. Board of Governors of the Federal Reserve System.
13. Rudebusch G.D. and Wu T. (2008). A Macro-Finance Model of the Term-Structure, Monetary Policy, and the Economy. // *Economic Journal*, 118, 1–21.
14. Stillwagon J. (2015). Testing the Expectations Hypothesis with Survey Forecasts: The Impacts of Consumer Sentiment and the Zero Lower Bound in an I(2) CVAR. // *Journal of International Financial Markets, Institutions & Money* 35, no.5: 85–101.
15. Дробышевский С., Луговой О., Астафьева Е., Буркова Н. (2010). Моделирование временной структуры процентных ставок по российским государственным облигациям в 2000–2008 гг. // *Ин-т экономики переходного периода. Научные труды. № 130Р*.



## Приложение 1

## Импульсные отклики факторных переменных на единичный шок соответствующего фактора, ед. (ортогонализация шоков по Холецкому)

